UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Matemáticas

Transformaciones Cubrientes y su Aplicación al Cálculo del Grupo Fundamental de la Circunferencia

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Guadalupe Morales Ramirez

Director de tesis:
Dr. Rafael Roberto Ramos Figueroa

Hermosillo, Sonora, México, 12 de febrero de 2014

SINODALES

Dr. Espinoza Fierro Jesús Francisco
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M. C. Hernández Amador Rosalía Guadalupe
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Dr. Ramos Figueroa Rafael Roberto
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

M.C. Robles Corbalá Carlos Alberto
Universidad de Sonora, Hermosillo, México

Índice general

Dedicatoria

A mis padres, Francisca Ramirez, Hilda Flores y Samuel Morales.

A mis hermanos, Adriana, Gabriela, Mariela, Miguel, Gabriel, Samuel.

A mi director de teis, Rafael Roberto Ramos Figueroa.

A mi maestro Carlos Robles Corbalá

Con todo cariño, Lupita

Agradecimientos

Gracias a todas las personas que hicieron posible este trabajo. Primeramente, agradezco a Dios, por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser la fortaleza que necesitaba en mis momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, de experiencias gratificantes, pero sobre todo de felicidad.

A mis padres Hilda Flores y Samuel Morales, con todo mi cariño y amor para las personas que hicieron todo en la vida para que yo lograra cumplir uno de mis sueños; por motivarme y por ser mis pilares. Por ser unos padres de lucha y por darme la mano cuando sentía que el camino se me terminaba, a ustedes por siempre mi corazón y mi agradecimiento.

A ustedes hermanos gracias por formar parte de mi familia, por compartir momentos de risas, de enojos, pero sobre todo de apoyo. Gracias por ser mi motivación.

Gracias al Departamento de Matemáticas, de la Universidad de Sonora, por ser como mi segunda casa, por ser parte de mi vida, por los apoyos a sus estudiantes. A mi director de tesis Rafael Ramos, muchas gracias por sus sabias palabras, por su orientación, por confiar en mí, por su paciencia y sus enseñanzas para lograr esté trabajo.

Gracias a mis maestros que, en este andar por la vida, influyeron con sus lecciones y experiencias para lograr formarme como una persona de bien, preparada para los retos que pone la vida, En particular, quiero agradecer al maestro Carlos Robles, por apoyarme en momentos difíciles, por su confianza en mí, su tiempo y paciencia, hoy solo puedo decir gracias por su formación como matemática y como persona.

A todas mis amigos: Jessica, Valeria, Arcelia, Carmen Romandia, Carmen Higuera, Alma Cristina, Kennya, Angelica, Mauricio, Claudio, Saul, Bogar, Panta, Chino, Dueñas, Mariana, Renné, Alejandra Fonseca, que me han visto crecer. Muchas gracias por estar conmigo en momentos buenos y malos. Recuerden que siempre los llevaré en mi corazón.

Al grupo de tesistas del verano 2013, sin duda fue uno de los mejores veranos, uno que nunca olvidaré.

Y por último pero no el menos importante, César Rosales. Muchas gracias por tu paciencia y comprensión, por tu bondad y sacrificio; me inspiras a ser mejor persona. Ahora puedo decir que esta tesis también lleva de ti. Muchas gracias por estar a mi lado.

Y no me puedo ir sin antes decirles que, sin ustedes a mi lado, no lo hubiera logrado. Tantas desveladas sirvieron de algo y aquí está el fruto. Les agradezco a todos ustedes con toda mi alma el haber llegado a mi vida y el compartir momentos agradables y momentos tristes, pero esos momentos son los que nos hacen crecer y valorar a las personas que nos rodean.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es presentar de manera accesible el cálculo del grupo fundamental de la circunferencia usando la teoría de espacios cubrientes y transformaciones cubrientes.

En el primer capítulo comenzaremos por definir algunos conceptos topológicos como trayectorias, homotopía y homotopía relativa lo cual nos permitira definir, para cada espacio topológico con punto base $x_0 \in X$, un grupo llamado el grupo fundamental de X que denotamos por $\pi_1(X, x_0)$. Resulta ser que este grupo es un invariante topolólogico, es decir, si dos espacios son homeomorfos sus grupos fundamentales son isomorfos. Esto es consecuencia de que una función continua entre dos espacios topológicos induce un homomorfismo de grupo entre los grupos fundamentales asociados, donde además dicho homomorfismo cumple una propiedad llamada propiedad de funtorialidad.

En el segundo capítulo introducimos el concepto de espacio cubriente, se enuncian y demuestran el teorema de levantamiento de trayectorias y el teorema de levantamiento homotopía, definimos una acción del grupo fundamental del espacio X sobre la fibra de un cubriente $\tilde{X}$ y demostramos que dicha acción es transitiva. Además se demuestra que todas las fibras de un espacio cubriente tienen la misma cardinalidad. Dado que cada fibra es discreta, tenemos que cualquier par de fibras son homeomorfas.

Finalmente, en el tercer capítulo como nuestro principal objetivo es calcular el grupo fundamental de la circunferencia, vemos la estrecha relación que existe entre el concepto de grupo fundamental y la teoría de espacios cubrientes, para eso enunciamos y demostramos resultados importantes como lo es el criterio del levantamiento, este criterio nos da un ejemplo de un teorema bueno de topología algebraica. Más adelante vemos que el teorema 3.9 amplía dicho criterio. Además definimos el espacio cubriente universal de un espacio X. (Esto es un espacio cubriente que es conexo y simplemente conexo) y mostramos que de existir el espacio cubriente universal es único.

Por otra parte dada una aplicación cubriente $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ consideramos el conjunto de todas los homomorfismos de $\tilde{X}$ en $\tilde{X}$ tales que $ph = p$. Dicho conjunto resulta ser un grupo el cual denotaremos por $Cov(\tilde{X}/X)$. Demostramos que dicho grupo actúa transitivamente en la fibra del punto base del cubriente $\tilde{X}$ y también definimos la equivalencia entre espacios cubrientes, $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ y $q : \tilde{X} \longrightarrow X$ de un espacio X si existe un homeomorfismo $h : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ entre ellos tal que $ph = q$.
Después demostramos que el normalizador del subgrupo $p_*\pi_1(\tilde{X})$ del grupo fundamental $\pi_1(X)$ cociente el subgrupo $p_*\pi_1(\tilde{X})$ es isomorfo a $Cov(\tilde{X}/X)$, es decir, $(Cov(\tilde{X}/X) \cong N_\pi(p_*\pi_1(\tilde{X}))/p_*\pi_1(\tilde{X}))$. Dicho resultado es el más importante de este trabajo pues después observamos que si $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ es un cubriente universal de X (es decir, $\pi_1(\tilde{X}) = 1$ con $\tilde{X}$ conexo) entonces el homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(\tilde{X}) \longrightarrow \pi_1(X)$ es tal que

$p_*\pi_1(\tilde{X})$ es el grupo trivial (pues $\pi_1(\tilde{X}) = 1$) y así el normalizador del grupo trivial $p_*\pi_1(\tilde{X})$ es $\pi_1(X)$ (pues el normalizador del subgrupo trivial de $\pi_1(X)$ es por definición, el subgrupo más grande de $\pi_1(X)$ que contiene a el grupo trivial como subgrupo normal, es decir es $\pi_1(X)$) y concluimos que $Cov(\tilde{X}/X)$ es isomorfo a $\pi_1(X)$ cuando $\tilde{X}$ es conexo y simplemente conexo.

Usando estos hechos y que $(\mathbb{R}, e^{2\pi it})$ es el cubriente universal de S^1 consideramos el grupo de transformaciones cubrientes $Cov(\mathbb{R}/S^1)$ y por cálculo directo demostramos que $Cov(\mathbb{R}/S^1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Por lo que concluimos que el grupo fundamental de la circunferencia es $\mathbb{Z}$.

Capítulo 1

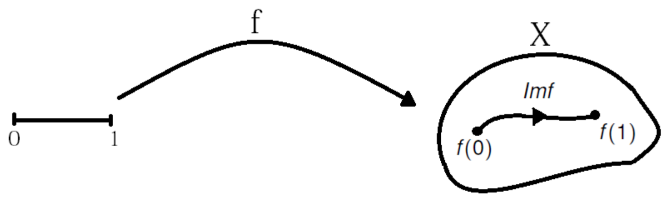
El grupo fundamental

En este capítulo vamos a considerar trayectorias sobre un espacio topológico X y una relación de equivalencia entre ellas conocida como homotopía relativa. Posteriormente, definiremos cierta operación sobre la colección de estas clases de equivalencia que la convierte un grupo. Llamaremos a dicho grupo el $grupo\ fundamental\ del\ espacio\ X$. Además hablaremos de algunos resultados relativos a la conexidad para mostrar algunos resultados importantes en los siguientes capítulos.

1.1. Definición de trayectoria

Definición 1.1. *Sea X un espacio topológico y $x_0, x_1 \in X$, una trayectoria en X de x_0 a x_1 es una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$.*

Obsérvese que la trayectoria es la función f y **no** la imagen $f([0,1])$; a la imagen se le llama una curva en X.



1.2. Homotopía

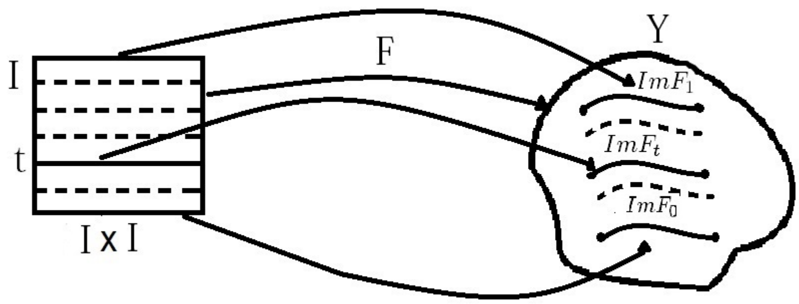
Definición 1.2. *Sean X, Y espacios topológicos y $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ funciones continuas. Se dice que f_0, f_1 son homotópicas si existe una función continua $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ tal que para todo $x \in X$*

$$F(x, 0) = f_0(x)$$

$$F(x, 1) = f_1(x)$$

La función F se llama una homotopía entre f_0 y f_1. Cuando tal homotopía existe escribimos $f_0 \simeq f_1$.

Observemos que para cada $t \in [0,1]$, F define una función continua $F_t : X \longrightarrow Y$ dada por $F_t(x) = F(x,t)$ para cada $x \in X$.



De modo que podemos imaginar una homotopía como una familia de funciones continuas, donde f_0 se deforma continuamente en f_1.

Si f_0 y f_1 son dos trayectorias, es decir, con dominio $X = I = [0,1]$, existe una relación más fuerte que es la homotopía relativa definida de la siguiente manera.

Definición 1.3. *Sean $f_0, f_1 : [0,1] \longrightarrow Y$ dos trayectorias en Y, diremos que $f_0 \simeq f_1$ rel $\{0,1\}$ si y sólo si existe $F : I \times I \longrightarrow Y$ continua tal que para todo $x, t \in I$*

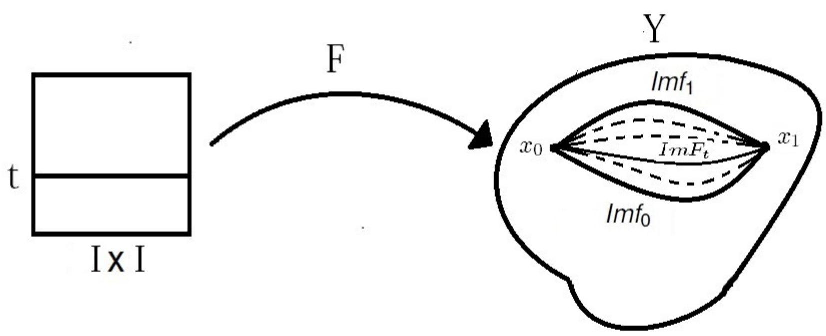
$$F(x,0) = f_0(x)$$

$$F(x,1) = f_1(x)$$

$$F(0,t) = x_0$$

$$F(1,t) = x_1$$

Esta definición nos dice que los puntos coinciden en los extremos de las trayectorias f_0 y f_1, así estos permanecen fijos durante la deformación como en la siguiente figura.



A continuación introducimos un resultado clásico en topología, conocido como el $lema$ $de\ pegado$ el cual nos permitirá demostrar que la concatenación de trayectorias es nuevamente una trayectoria.

Lema 1.4. *Supongamos que un espacio X es una unión finita de subconjuntos cerrados $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. Si para algún espacio Y existen funciones continuas $f_i : X_i \longrightarrow Y$ tales que coinciden en sus intersecciones, ($f_i|X_i \cap X_j = f_j|X_i \cap X_j$ para cada i, j) entonces existe una única función continua $f : X \longrightarrow Y$ con $f|X_i = f_i$ para todo i.*

Demostración:

Es claro que f definida por $f(x) = f_i(x)$ si $x \in X_i$ es una única función bien definida $f : X \longrightarrow Y$ con restricciones $f|X_i = f_i$ para todo i. Así que sólo falta probar que f es continua.

Sea C un subconjunto cerrado en Y, entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= X \cap f^{-1}(C) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) \cap f^{-1}(C) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \cap f^{-1}(C)) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (X_i \cap f_i^{-1}(C)) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(C). \end{aligned}$$

Luego, como cada f_i es continua, se tiene que $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en X_i; además, como X_i es cerrado en X, se sigue que $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en X. Por lo tanto $f^{-1}(C)$ es cerrado en X, siendo la unión finita de los conjuntos cerrados $f_i^{-1}(C)$ se concluye que f es continua.

■

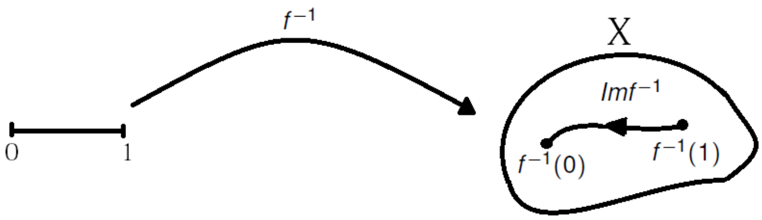
Definición 1.5. *Sean $f, g : I \longrightarrow X$ dos trayectorias tales que $f(1) = g(0)$.*
El producto de trayectorias denotado por $f * g$ es la trayectoria definida de la siguiente manera:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

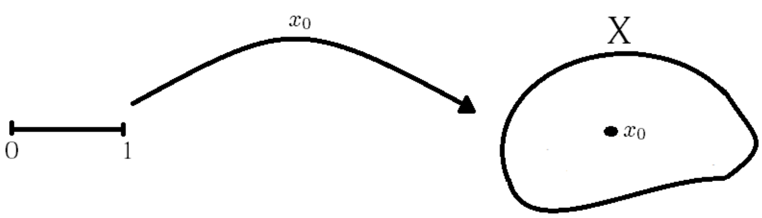
Notemos que efectivamente la función $f * g$ está bien definida en I y es continua por el lema de pegado, basta tomar los subconjuntos cerrados $X_0 = [0, \frac{1}{2}]$ y $X_1 = [\frac{1}{2}, 1]$ para verificar que f y g satisfacen las condiciones del lema de pegado.

Sin embargo, la multiplicación de lazos no es asociativa, es decir, $(f * g) * h \neq f * (g * h)$.

Definición 1.6. *Sea X espacio topológico y $f : [0,1] \longrightarrow X$, una trayectoria en X. Definamos la trayectoria inversa de f, por $f^{-1}(t) = f(1-t)$.*

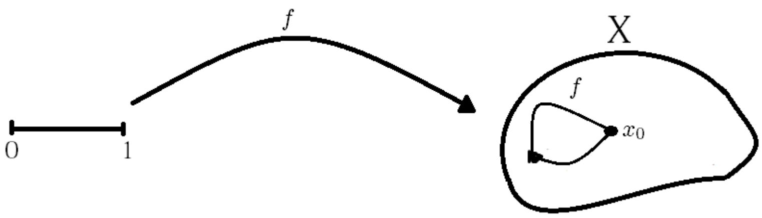


Definición 1.7. *Sea $x_0 \in X$ fijo, definimos la trayectoria constante $x_0 : I \longrightarrow X$ por $x_0(t) = x_0$ para todo $t \in [0,1]$.*



Definición 1.8. *Sea $x_0 \in X$. Decimos que una trayectoria $f : I \longrightarrow X$ es un lazo basado en x_0 si $f(0) = f(1) = x_0$.*

Observemos que el producto $f * g$ está bien definido para todo par de lazos con punto base en algún $x_0 \in X$.



Introducimos una relación de equivalencia en el conjunto de lazos basados en x_0.

Definición 1.9. *Sean $f, g : I \longrightarrow X$ lazos basados en x_0. Decimos que f y g están relacionados si y sólo si $f \simeq g$ rel $\{0,1\}$.*

Se dice que dos lazos f y g en X son quivalentes si f y g son homotópicos relativamente al $\{0,1\}$. La relación en la definición 1.9 cumple con las propiedad de ser reflexiva, transitiva y simétrica.

Definición 1.10. *Sea $[f]$ la clase de equivalencia del lazo f. Definimos ahora un producto de clases de equivalencia de lazos por*

$$[f][g] = [f * g].$$

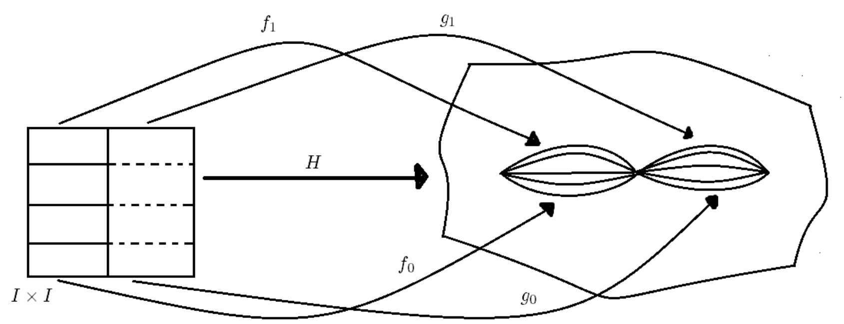
Observemos que la relación de equivalencia y el producto que hemos definido son compatibles en el siguiente sentido: Si $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$, entonces $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.

Veamos que la homotopía buscada es:

$$H(x,t) = \begin{cases} f(2x,t) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ g(2x-1,t) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

para toda $x, t \in [0,1]$

Así, es posible multiplicar clases de equivalencia de lazos: Si f y g son trayectorias tales que $f(1) = g(0)$, entonces tenemos que H es continua por el lema de pegado, así tiene sentido definir el producto de sus clases $[f][g] = [f] * [g]$, es decir, la equivalencia de su trayectorias es compatible con su producto.



1.3. El grupo fundamental

Lema 1.11. *Sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$ fijo. Veamos que estas propiedades forman un grupo, esto es,*

1. $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$
2. $[f] * [x_0] = [x_0] * [f] = [f]$
3. $[f] * [f^{-1}] = [f^{-1}] * [f] = [x_0]$

1. Tenemos que ver que $f * (g * h)$ es homótopo a $(f * g) * h$ para ello basta definir la siguiente homotopía;

$$F(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{4x}{t+1}\right) & 0 \leq x \leq \frac{t+1}{4} \\ g(4x-t-1) & \frac{t+1}{4} \leq x \leq \frac{t+2}{4} \\ h(\frac{4x-t-2}{2-t}) & \frac{t+2}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

y comprobar que,

$F(x,0) = f * (g * h)$ y $F(x,1) = (f * g) * h$

2. Considerando

$$F(x,t) = \begin{cases} f\left(\frac{2x}{2-t}\right) & 0 \leq x \leq \frac{2-t}{2} \\ \\ x_0 & \frac{2-t}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que f (tómese a $t = 0$) y $f * x_0$ (tómese a $t = 1$) son homotopos. Un razonamiento simétrico cambiando en la formula anterior x por $1-x$ y a f por f^{-1} esto prueba que $x_0 * f$ también lo son.

3. Definiendo,

$$F(x,t) = \begin{cases} f(2xt) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2t(1-x)) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

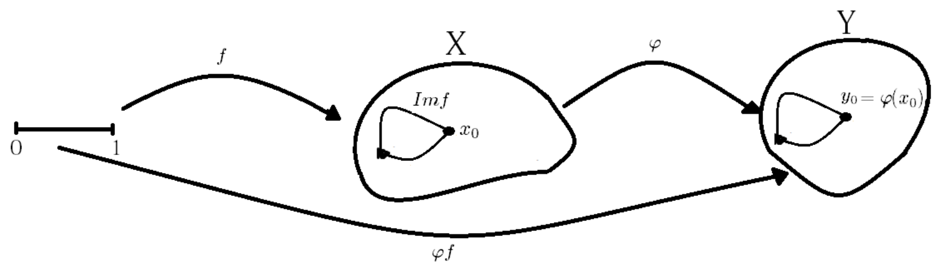
Se tiene que $F(x,0) = x_0$ y $F(x,1) = (f * f^{-1})$ donde $[f] * [f^{-1}] = [x_0]$. Cambiando x por $1-x$ se tiene que $[f^{-1}] * [f] = [x_0]$. Ver la demostración en [4] pag. 44.

■

Definición 1.12. *El grupo del lema 1.11 se llama el grupo fundamental de X con punto base x_0 y se denota por $\pi_1(X, x_0)$.*

1.4. Funtorialidad

Intuitivamente está claro que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio X, pues espacios homeomorfos tendrán grupos isomorfos y la composición de funciones es preservada. Una forma de probar este hecho es introduciendo el concepto de "homomorfismo inducido" por una aplicación continua, teniendo en mente la siguiente figura.



1.4.1. Homomorfismo inducido

Si $\varphi : (X, x_0) \longrightarrow (Y, \varphi x_0)$ es una función continua entonces tenemos una aplicación $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ definido por $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$.
Veamos que φ_* esta bien definida.

Sea $f_0 \simeq f_1$ rel $\{0, 1\}$ entonces existe $F : I \times I \longrightarrow Y$ continua tal que

$$F(x, 0) = f_0(x)$$

$$F(x, 1) = f_1(x)$$

para todo $x \in X$

$$F(0, t) = x_0$$

$$F(1, t) = x_1$$

para todo $t \in I$
Definiendo $G : I \times I \longrightarrow Y$ como

$$G(x, t) = \varphi \circ F(x, t)$$

entonces,

$$\begin{gathered} G(x, 0) = \varphi \circ F(x, 0) = \varphi(f_0(x)) \\ G(x, 1) = \varphi \circ F(x, 1) = \varphi(f_1(x)) \\ G(0, t) = \varphi \circ F(0, t) = \varphi(x_0) \\ G(1, t) = \varphi \circ F(1, t) = \varphi(x_1) \end{gathered}$$

Por lo tanto, $\varphi \circ f_0 \simeq \varphi \circ f_1$ rel {0,1} y se sigue que φ está bien definida.
Probaremos enseguida que φ_* es un homomorfismo de grupos, i.e $\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([f])\varphi_*([g])$.
Sea f y g lazos en X con punto base x_0 y recordemos que

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Sabemos que $\varphi_*([f * g]) = [\varphi(f * g)]$

Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \varphi_*([f][g]) = \varphi_*([f * g]) &= [\varphi(f * g)] \\ &= [\varphi f * \varphi g] \text{ por (1.1)} \\ &= [\varphi f]\ [\varphi g] \\ &= \varphi_*([f])\varphi_*([g]). \end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi_*([f][g]) = (\varphi_*[f])(\varphi_*[g])$.

Lema 1.13. *Si $\psi : (Y, \varphi(x_0)) \longrightarrow (Z, \psi\varphi(x_0))$ es también una aplicación continua, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1. $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*.$
2. $id_* = id$ donde $id : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ es la aplicación identidad.

Para demostrar la primera propiedad sea $[h] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$\begin{aligned}(\psi\varphi)_*[h] &= [(\psi\varphi)h] \\ &= [\psi(\varphi(h))] \\ &= \psi_*[\varphi(h)] \\ &= \psi_*\varphi_*[h].\end{aligned}$$

Si $id : X \longrightarrow X$ es la identidad y $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ entonces $id_*([g]) = [id \circ g] = [g]$ de sigue que id_* es el homomorfismo identidad en $\pi_1(X, x_0)$.

Este homomorfismo inducido será extraordinariamente importante en el estudio del grupo fundamental. Usando las $propiedades\ de\ funtorialidad$ (anteriores) probaremos el siguiente teorema.

Teorema 1.14. *Si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo tal que $\varphi(x_0) = y_{0,}$ entonces $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración:

Dado que $\varphi : X \longrightarrow Y$ es homeomorfismo entonces existe $\psi : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ continua tal que $\varphi \circ \psi = id_{(Y,y_0)}$ y $\psi \circ \varphi = id_{(X,x_0)}$ entonces $(\varphi \circ \psi)_* = id_*$ y $(\psi \circ \varphi)_* = id_*$ esto implica que $\varphi_* \circ \psi_* = id_*$ y $\psi_* \circ \varphi_* = id_*$ por las propiedades 1 y 2.

Por lo tanto φ_* es isomorfismo de grupos.

■

1.4.2. Ejemplos

1. Si hay únicamente una clase de homotopía de trayectorias que conectan al punto base x_0 con el mismo, es decir, de trayectorias cerradas x_0 entonces $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = 1$
2. Para S^1, intuitivamente podemos ver que $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$, donde a cada clase de lazos en $S^{1,}$ está caracterizada por el número de vueltas que le da la circunferencia. Más a delante mostraremos formalmente que $\pi_1(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ una vez que estudiemos los espacios cubrientes.

Más adelante estudiaremos la teoría de espacios cubrintes para así calcular el grupo fundamental de la circunferencia, y para eso recordaremos algunos conceptos que usaremos más adelante, como conexo, conexo por trayectorias y simplemente conexo.

Definición 1.15. *Decimos que el espacio X es conexo si, para todos los conjuntos abiertos U y V en X tales que $X \subset U \cup V$, se tiene $U \cap V \neq \varnothing$.*

Definición 1.16. *Decimos que un espacio topológico X es conexo por trayectorias si para cada $x, y \in X$ existe una trayectoria de x a y.*

Definición 1.17. *Un espacio topológico X se dice que es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y $\pi_1(X, x) = \{1\}$ para algún $x \in X$.*

Observación 1.18. *S^n es simplemente conexo para toda $n \geqslant 2$*

Aunque ya hallamos definido el grupo fundamental, hasta el momento no es suficiente calcular el grupo fundamental de la circunferencia, ya que para que eso sea posible es importante, hablar de espacios cubrientes, levantamiento de trayectorias, homotopias y tranformaciones cubrientes. De esta manera ver como el grupo fundamental y los espacios cubrientes estan muy relacionados, y como no resulta ser trivial calcular el grupo fundamental de la circunferencia, que es nuestro principal objetivo.

Capítulo 2

Espacios cubrientes

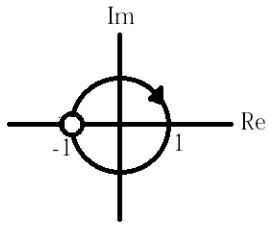
Pasaremos a estudiar uno de los conceptos más importantes de la topología algebraica, como lo es el espacio cubriente, en este capítulo introducimos este concepto así como el teorema de levantamiento de trayectorias y levantamiento de homotopía, de esta manera definimos la acción del grupo fundamental del espacio X sobre la fibra de un cubriente $\tilde{X}$ y decimos cundo dicha acción actúa transitivamente, también hablaremos del espacio cubriente regular donde en el tercer capítulo estos resultados se veran mas estrechamente relacionados con el grupo de tranformaciones cubrientes para así cálcular el grupo fundamental de la ciercunferencia.

Definición 2.1. *Sean $\tilde{X}$, X espacios topológicos y sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ continua. Un conjunto abierto U en X está parejamente cubierto por p si $p^{-1}(U)$ es una unión ajena de conjuntos abiertos $S_i \subset \tilde{X}$, llamadas hojas, con $p|_{S_i} : S_i \longrightarrow U$ un homeomorfismo para cada i.*

Ejemplo 2.2: Consideremos la aplicación exponencial compleja $exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $exp(t) = e^{2\pi i}$. Entonces el conjunto abierto $U = S^1 - \{-1\}$ está parejamente cubierto por exp; en efecto, de la formula de Euler

$$exp(t) = e^{2\pi it} = \cos 2\pi t + i\text{sen}2\pi\text{t}.$$

Sea $t \in exp^{-1}(U)$ o bien $exp(t) \neq -1$. Al ser la exp periodica con periodo 2π, $exp \neq -1$ si y sólo si $-\pi + 2\pi n < 2\pi t < \pi + 2\pi n$, para algún $n \in \mathbb{Z}$, o equivalentemente, $-\frac{1}{2} + n < t < \frac{1}{2} + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.



Por lo tanto

$$exp^{-1}(U) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right).$$

Así, las hojas en este caso son intervalos abiertos. Notemos que

$$(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})\cap(n'-\frac{1}{2},n'+\frac{1}{2})=\varnothing$$

para todo $n\neq n'$enteros y

$$exp|_{(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})}:(n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2})\longrightarrow S^1-\{1\}=U$$

es un homeomorfismo para todo $n\in\mathbb{Z}$.

2.1. La definición de espacio cubriente

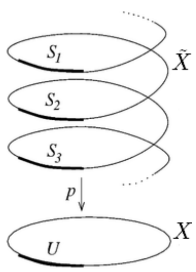
Recordemos que un espacio topológico es conexo por trayectorias si todo par de puntos se pueden unir por una trayectoria.

Definición 2.2. *Sea X un espacio topológico, entonces un par ordenado $(\tilde{X},p)$ es un espacio cubriente de X si:*

1. *$\tilde{X}$ es un espacio topológico conexo por trayectorias.*
2. *$p:\tilde{X}\longrightarrow X$ es una función continua.*
3. *Cada $x\in X$ tiene una vecindad abierta que está parejamente cubierta por p.*

La función p se llama proyección cubriente, y un conjunto abierto que es parejamente cubierto por p se llama p-admisible, o simplemente, admisible.

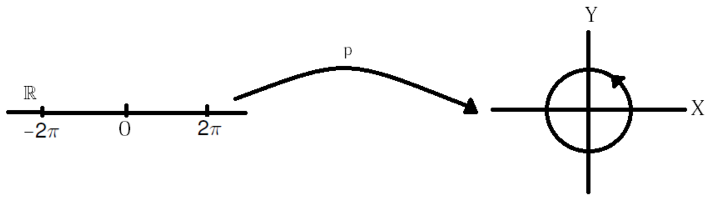
Es claro que el conjunto de abiertos admisibles en X forman una cubierta abierta para X. Gráficamente, podemos tener en mente la siguiente figura.



2.1.1. Ejemplos

La función exponencial compleja en el ejemplo 2.2 junto con $\mathbb{R}$, define un espacio cubriente de S^1.

1. Definamos $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ por $p(t) = (\mathrm{sen}(2\pi\mathrm{t}), \cos(2\pi\mathrm{t}))$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio cubriente de la circunferencia unitaria S^1. Pues $\mathbb{R}$ es conexo, p es continua y de hecho todo arco abierto de longitud 2π (o bien, 1) del circulo S^1 puede servir como vecindad parejamente cubierta.



2. Otro ejemplo similar al anterior es utilizando coordenadas polares (r, θ) en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces la circunferencia unidad está definida por la condición $r = 1$. Para cada entero $n \neq 0$, definimos una función $p_n : S^1 \longrightarrow S^1$ por la ecuación:

$$p_n(1, \theta) = (1, n\theta).$$

La función p_n enrrolla la circunferencia n veces sobre si misma, observemos que si $n \neq 0$, el par (S^1, p_n) es un espacio cubriente de S^1. De nuevo el arco propio de S^1 es una vecindad parejamente cubierta.

3. Si X es un espacio conexo por trayectorias e $id : X \longrightarrow X$ la identidad entonces (X, id) es un ejemplo trivial de espacio cubriente de X. Análogamente, si f es un homeomorfismo de Y sobre X, entonces (Y, f) es un espacio cubriente de X.

4. Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y $(\tilde{Y}, q)$ es un espacio cubriente de Y, entonces $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ es un espacio cubriente de $X \times Y$donde la función $p \times q$ está definida por $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(x))$. Además, si U es una vecindad parejamente cubierta del punto $x \in X$ y V es una vecindad parejamente cubierta del punto $y \in Y$, entonces $U \times V$ es una vecindad parejamente cubierta de $(x, y) \in X \times Y$.

Recordemos que una función continua $f : Y \longrightarrow X$ es un homeomorfismo local si cada $y \in Y$ tiene una vecindad abierta V y con $f|_V : V \longrightarrow f(V)$ homeomorfismo.

Notemos que en particular una proyección cubriente es un ejemplo de homeomorfismo local.

Lema 2.3. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X. Entonces la aplicación continua p es abierta y sobreyectiva, esto es, una identificación. Además, X es conexo por trayectorias.*

Demostración:

Veamos primero que p es sobreyectiva

Sea $x \in X$. Entonces existe U_x admisible, esto es, $x \in U_x$ entonces $\mathrm{p}^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} S_i$ donde $\{S_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de hojas.

Luego

$$p(p^{-1}(U)) = p\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right) = \bigcup_{i\in I} p(S_i) = \bigcup_{i\in I} U = U.$$

Por lo tanto $x \in U_x = p(p^{-1}(U)),$ es decir $x \in Im\, p$.

Veremos que p es una función abierta.

Sea $V \subseteq \tilde{X}$ abierto. Para mostrar que $p(V)$ es abierto, probaremos que para cada $x \in p(V)$ existe una vecindad abierta de x completamente contenida en $p(V)$. De hecho, el abierto será de la forma $p(S_{i_0} \cap V)$ para alguna hoja S_{i_0} en X.

Sea $x \in p(V)$. Notemos que $p^{-1}(x) \cap V \neq \varnothing$. Pues dado que $x \in p(V)$ entonces $x = p(\tilde{x})$ para algún $\tilde{x} \in V,$ entonces $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $\tilde{x} \in V$ entonces $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$.

Consideremos ahora $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap V$ y V una vecindad admisible que contiene a x.

Dado que $x \in U$

$$\tilde{x} \in p^{-1}(x) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} S_i$$

donde $\{S_i\}_{i\in I}$ es la colección de hojas. Así, $\tilde{x} \in S_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Entonces como $\tilde{x} \in V$, $S_{i_0} \cap V$ es un abierto en S_{i_0} que contiene a $\tilde{x}$.

Por lo tanto que $p|_{S_{i_0}} : S_{i_0} \longrightarrow U$ es un homeomorfismo entonces $p(S_{i_0} \cap V)$ es un abierto en U que contiene a x. (ya que $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$). Dado que U es abierto en X entonces $p(S_{i_0} \cap V)$ es abierto en X que contiene a x. Además, como $p(S_{i_0} \cap V) \subseteq p(V)$ entonces $p(S_{i_0} \cap V)$ es el abierto que buscabamos. Concluimos que p es abierto.

Finalmente la imágen continua de un espacio conexo por trayectorias es conexo por trayectorias, de modo que al ser $\tilde{X}$ el espacio cubriente, y en particular conexo por trayectorias se sigue que también X lo es.

■

Nota: La proyección cubriente $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ en general no es cerrada. Para probarlo, consideremos nuevamente la proyección cubriente del ejemplo 2.2. El conjunto discreto $A = \{n + \frac{1}{n} | n \geq 3\}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} \backslash A = \bigcup_{n\geq 3} (n + \frac{1}{n}, n + 1 + \frac{1}{n+1}) \cup (-\infty, 3 + \frac{1}{3}) \text{ es un abierto de } \mathbb{R}.$$

Sin embargo, la imagen de A bajo la exp no es cerrada en S^1 pues:

si $B = exp(A)$, entonces

$$B = \{y \in S^1 \mid y = e^{2\pi i (n + \frac{1}{n})} \text{ para algún } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \geq 3\}.$$

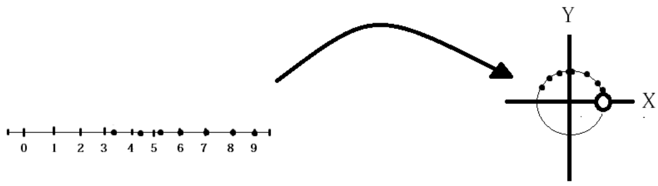
Dado que

$$\begin{aligned} e^{2\pi i(n+\frac{1}{n})} &= e^{2\pi i n+\frac{2\pi i}{n}} \\ &= e^{2\pi i n}\cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} \\ &= 1\cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} \\ &= e^{\frac{2\pi i}{n}} \end{aligned}$$

tenemos que $B = \{y \in S^1 \mid y = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 3\}$.
Por otro lado, recordemos que B es cerrado si y sólo si $B \supseteq B^a$, donde B^a es el conjunto de puntos de acumulación de B. Veremos a continuación que para este caso no se cumple que $B \supseteq B^a$.
Por definición

$$B^a = \{x \in S^1 \mid (U - \{x\}) \cap B \neq \varnothing \text{ para toda vecindad abierta } U \text{ de } x\}$$

entonces $1 \in B^a$ pues Sin embargo $1 \notin B$
Por lo tanto B no contiene a todos sus puntos de acumulación de modo que $B = exp(A)$ no es cerrado.



■

Proposición 2.4. *Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y si $x_0 \in X$, entonces la fibra $p^{-1}(x_0)$ es un subconjunto discreto de $\tilde{X}$, esto es, $p^{-1}(x_0)$ tiene la topología discreta como subespacio de $\tilde{X}$.*

Probaremos que todo subconjunto de $p^{-1}(x_0)$ es abierto.

Sea U una vecindad parejamente cubierta de x_0 y $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Entonces,

$$\tilde{x} \in p^{-1}(x_0) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} S_i$$

donde $\{S_i\}_{i\in I}$ es la colección de hojas. Entonces $\tilde{x} \in S_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$, por lo que $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0) \cap S_{i_0}$.

Afirmamos que de hecho $p^{-1}(x_0) \cap S_{i_0} = \{\tilde{x}\}$. Para probar que $p^{-1}(x_0) \cap S_{i_0} \subseteq \{\tilde{x}\}$, supongamos que existe $\tilde{x}' \in p^{-1}(x_0) \cap S_{i_0}$ con $\tilde{x}' \neq \tilde{x}$. Entonces $\tilde{x}, \tilde{x}' \in p^{-1}(x_0)$ así tenemos que $p(\tilde{x}) = p(\tilde{x}')$ pero $\tilde{x}, \tilde{x}' \in S_{i_0}$ y $\tilde{x} \neq \tilde{x}'$, entonces $p|_{S_{i_0}} : S_{i_0} \longrightarrow U$ no es uno a uno, lo que contradice el hecho de que $p|_{S_{i_0}}$ sea un homeomorfismo.

Por lo tanto

$$p^{-1}(x_0) \cap S_{i_0} = \{\tilde{x}\}.$$

Así todo punto en $p^{-1}(x_0)$ es abierto y por lo tanto todo subconjunto de $p^{-1}(x_0)$ es también abierto en $p^{-1}(x_0)$. Por tanto $p^{-1}(x_0)$ tiene la topología discreta como subespacio de $\tilde{X}$.

■

Lema 2.5. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, sea Y un espacio conexo y sea $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ continua. Entonces, dado $\tilde{x}_0$ en la fibra de x_0, si existe una función continua $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ tal que $p\tilde{f} = f$, esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

entonces f es única.

Demostración:

Demostraremos la unicidad de $\tilde{f}$, esto es, si $\tilde{f}$ existe entonces es única.

Sea $f' : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ que satisface que $pf' = f$. Probaremos que $f = f'$.

Sean

$$A = \left\{ y \in Y | \tilde{f}(y) = f'(y) \right\}$$
$$B = \left\{ y \in Y | \tilde{f}(y) \neq f'(y) \right\}$$

entonces tenemos que $Y = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ y si $\tilde{f}$ existe, entonces $A \neq \varnothing$, pues $y_0 \in A$ porque $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ *y* $f'(y_0) = \tilde{x}_0$. Si probamos que A y B son abiertos, entonces la conexidad de Y forzará a que $B = \varnothing$, y entonces $\tilde{f} = f'$.
Probaremos primero que A es bierto.

Sea $a \in A$ y Sea U una vecindad parejamente cubierta de $f(a)$. Dado que por hipótesis $f(a) = p\tilde{f}(a) = pf'(a)$ entonces

$\tilde{f}(a) = f'(a) \in p^{-1}(f(a)) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} S_i$ de modo que

$\tilde{f}(a) = f'(a) \in S$ para alguna hoja S sobre U.

Afirmamos que $W = \tilde{f}^{-1}(S) \cap f'^{-1}(S)$ es una vecindad abierta de a en Y. En efecto,

$$a \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(a)) \cap f'^{-1}(f'(a)) \subseteq \tilde{f}^{-1}(S) \cap f'^{-1}(S) = W,$$

además W es abierto en Y pues S es abierto en $\tilde{X}$ y $\tilde{f}, f'$ son continuas. Finalmente, se tiene que $W \subseteq A$, pues si $w \in W = \tilde{f}^{-1}(S) \cap f'^{-1}(S)$. Entonces $w \in \tilde{f}^{-1}(S)$ y $w \in f'^{-1}(S)$ así tenemos que $\tilde{f}(w) \in S$ y $f'(w) \in S$, pero como por hipótesis $p\tilde{f}(w) = f(w) = pf'(w)$ y $p|_s : S \longrightarrow U$ es homeomorfismo, se sigue que $\tilde{f}(w) = f(w)$

Por lo tanto $w \in A$ y concluimos que $W \subseteq A$.

Hemos probado que para todo $a \in A$ arbitrario existe W abierto en Y tal que $a \in W \subseteq A$. Por lo tanto A es abierto.

Probaremos ahora que B es abierto.

Sea $b \in B$ y sea V una vecindad parejamente cubierta de $f(b)$. Tenemos que $f(b) = p\tilde{f}(b) = pf'(b)$, entonces $\tilde{f}(b), f'(b) \in p^{-1}(f(b)) \subseteq p^{-1}(V)$ lo que implica que $\tilde{f}(b), f'(b) \in p^{-1}(V)$.

Si $\tilde{f}(b)$ y $f'(b)$ están en la misma hoja S'' sobre V, entonces por ser $p|_{S''} : S'' \longrightarrow V$ un homeomorfismo, $p\tilde{f}(b) = f(b) = pf'(b)$ implica que $\tilde{f}(b) = f'(b)$.
Pero esto contradice el hecho de que $b \in B$. Por tanto $\tilde{f}(b) \in S$ y $f'(b) \in S'$ donde S y S' son distintas hojas.

Afirmamos que $W' = \tilde{f}^{-1}(S) \cap f'^{-1}(S')$ es una vecindad abierta de b. En efecto, tenemos que $b \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(b)) \cap f'^{-1}(f'(b)) \subseteq \tilde{f}^{-1}(S) \cap f'^{-1}(S) = W$. Además S y S' son abierto y $\tilde{f}$, f' continuas, esto implica que W es abierto. Ahora mostraremos que $W' \subseteq B$. Para ésto, consideremos $w' \in W' = \tilde{f}^{-1}(S) \cap f'^{-1}(S')$. Entonces $w' \in \tilde{f}^{-1}(S)$ y $w' \in f'^{-1}(S')$ implican que $\tilde{f}(w') \in S$ y $f'(w') \in S'$.

Así, dado que $S \cap S' = \varnothing$ entonces $\tilde{f}(w') \neq f'(w')$. Por tanto tenemos que $w' \in B$. Por lo tanto $w' \subseteq B$. Dado un $b \in B$ arbitrario hemos probado que existe un abierto W' en Y tal que $b \in W' \subseteq B$. Por lo tanto B es abierto.

■

2.2. Teorema de levantamiento de trayectorias

El teorema de levantamiento de trayectorias es uno de los mas imporatantes en este trabajo, ya que para llegar a nuestro objetivo es de mucha utilidad.

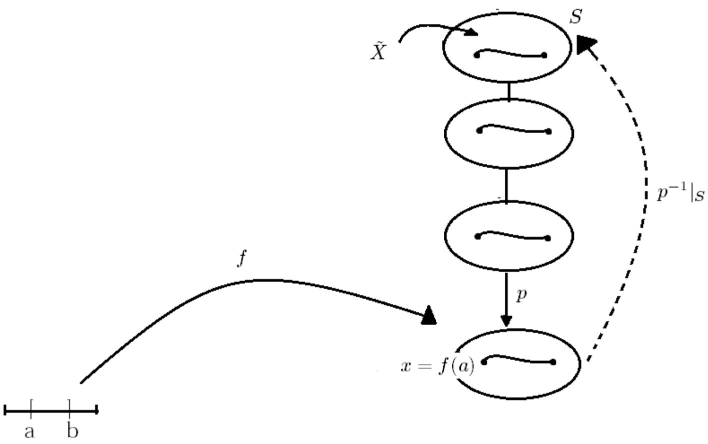
Teorema 2.6. *(Teorema de levantamiento de trayectorias).*
Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y sea $f : (I, 0) \longrightarrow (X, x_0)$ una trayectoria. Si $\tilde{x_0}$ está en la fibra de x_0, entonces existe una única trayectoria $\tilde{f} : (I, 0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ con $p\tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (I, 0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Demostración:

La unicidad de $\tilde{f}$ se sigue del lema 2.5 (basta tomar $(Y, y_0) = (I, 0)$ pues I es conexo.)
Probaremos la existencia de $\tilde{f}$.

Supongamos que $[a, b] \subseteq I$ es tal que $f([a, b]) \subseteq U$ con U una vecindad admisible de $x = f(a)$.
Si $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ entonces $\tilde{x}$ está en una única hoja sobre U, digamos S. Dado que $p|_S : S \longrightarrow U$ es un homeomorfismo existe $(p|_S)^{-1} : U \longrightarrow S$. Definamos la aplicación $\tilde{g} : ([a, b], a) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ como $\tilde{g} = (p|_S)^{-1} \circ (f|_{[a,b]})$.
Notemos que $p\tilde{g} = f|_{[a,b]}$, pues si $k \in [a, b]$ entonces $p\tilde{g}(k) = p \circ (p|_S)^{-1} \circ f(k) = f(k)$. Por lo tanto $p\tilde{g} = f|_{[a,b]}$.



Para cada $t \in I$, sea U_t una vecindad admisible de $f(t)$.
Ahora $\{f^{-1}(U_t)\}_{t\in I}$ es una cubierta abierta para el espacio métrico compacto I, entonces tiene un número de Lebesgue δ. Esto significa que si $Y \subseteq I$ con diámetro menor que δ, entonces $Y \subseteq f^{-1}(U_t)$ para algún $t \in I$; esto es $f(Y) \subseteq U_t$.

Entonces podemos particionar I con puntos $t_1 = 0, t_2, ..., t_m = 1$ donde $t_{i+1} - t_i < \delta$ para todo $i = 1, ..., m-1$.

Por nuestra observación inicial, existe una función continua

$$\tilde{g}_1 : [0, t_2] \longrightarrow \tilde{X} \text{ con } p\tilde{g}_1 = f|_{[0,t_2]} \text{ y } \tilde{g}_1(0) = \tilde{x_0},$$

de la misma manera para cada $i = 1, .., m-2$ existe una función continua

$$\tilde{g}_2 : [t_2, t_3] \longrightarrow \tilde{X} \text{ con } p\tilde{g}_2 = f|_{[t_2,t_3]} \text{ y } \tilde{g}_2(t_2) = \tilde{g}_1(t_2) \text{ y}$$

$$\tilde{g}_{i+1} : [t_{i+1}, t_{i+2}] \longrightarrow \tilde{X} \text{ con } p\tilde{g}_{i+1} = f|_{[t_{i+1},t_{i+2}]} \text{ y } \tilde{g}_{i+1}(t_{i+1}) = \tilde{g}_i(t_{i+1}).$$

Entonces definimos $\tilde{f} : I \longrightarrow \tilde{X}$ por $\tilde{f}(t) = \tilde{g}_i(t)$ si $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Aplicando nuevaente el lema de pegado, se sigue que $\tilde{f}$ es continua pues $I = \bigcup_{i=1}^{m-1}[t_i, t_{i+1}]$ es una unión finita de subconjuntos cerrados así cada $\tilde{g} : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \tilde{X}$ es continua, además de que coinciden en las intersecciones de los intervalos.

Por lo tanto una trayectoria en $\tilde{X}$

■

2.3. Teorema de levantamiento de homotopía

Teorema 2.7. *(Teorema de levantamiento de homotopías)*
Sean $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, y Y cualquier espacio topológico. Sean $\tilde{f}$ y f continuas dcque hacen al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "j"'] & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\
(Y \times I, (y_0, 0)) \arrow[r, "F"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

donde $j(y) = (y, 0)$, $y \in Y$. Entonces existe una función continua $\tilde{F} : Y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ que hace conmutar los dos triángulos en el diagrama siguiente. Más aún, si Y es conexo entonces $\tilde{F}$ es única.

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "j"'] & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\
(Y \times I, (y_0, 0)) \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & (X, x_0)
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Demostración:

Probaremos primero que si Y es conexo entonces $\tilde{F}$ es única. Supongamos que existe $\tilde{F}$ tal que hace conmutar al diagrama (2.4) Como Y es conexo entonces $Y \times I$ es conexo así por el lema 2.5, $\tilde{F} : Y \times I \longrightarrow \tilde{X}$ es la única tal que el triangulo inferior de 2.4

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\
(Y \times I, (y_0, 0)) \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & (X, x_0)
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

es conmutativo.

Por lo tanto $\tilde{F}$ es única tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "j"'] & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\
(Y \times I, (y_0, 0)) \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & (X, x_0)
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

conmuta.

Probaremos ahora que es suficiente trabajar localmente, probando que $\tilde{F}$ existe si cada $y \in Y$ tiene una vecindad abierta N_y tal que hay una funcion continua $\tilde{F}_y$ que hace conmutar el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
N_y \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\
N_y \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}_y"] & X
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Donde las funciones horizontales son las restricciones de $\tilde{f}$ y F respectivamente.
Dado que $\{N_y \times I\}_{y \in Y}$ es una cubierta abierta de $Y \times I$, basta probar que las $\tilde{F}_y$ coinciden en sus intersecciones por el lema de pegado.

Supongamos que $y' \in N_y \cap N_z$ entonces,

$$\tilde{F}_y(y', 0) = \tilde{f}(y') = \tilde{F}_z(y', 0).$$

Además para todo $t \in I$ se tiene

$$p\tilde{F}_y(y', t) = F(y', t) = p\tilde{F}_z(y', t)$$

entonces $\tilde{F}_y$ y $\tilde{F}_z$ son levantamientos de $F|_{\{y'\}\times I}$ que coinciden en $(y', 0)$.

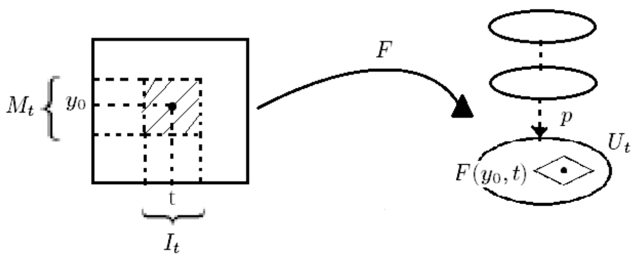
$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{X}, \tilde{f}(y')) \arrow[d, "p"] \\
(\{y'\} \times I, 0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}_y, \tilde{F}_z"] \arrow[r, "F|_{\{y'\}\times I}"'] & (X, F(y', 0) = f(y))
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Dado que $\{y'\} \times I$ es conexo entonces, por el lema 2.5 tenemos que

$$\tilde{F}_y|_{\{y'\}\times I} = \tilde{F}_z|_{\{y'\}\times I}.$$

Como y' es un elemento arbitrario de $N_y \cap N_z$ entonces $\tilde{F}_y$ y $\tilde{F}_z$ coinciden en $(N_y \cap N_z) \times I = (N_y \times I) \cap (N_z \times I)$.

Ahora construiremos las vecindades N_y y las funciones continuas $\tilde{F}_y$. Sea $y_0 \in Y$ fijo. Para cada $t \in I$, sea U_t una vecindad admisible de $F(y_0, t)$ en X; dado que F es continua, existen vecindades abiertas M_t e I_t de y_0 y t respectivamente con $F(M_t \times I_t) \subseteq U_t$.



Dado que I es compacto y $\{I_t\}_{t\in I}$ es una cubierta abierta de I entonces $\{I_t\}_{t\in I}$ tiene una subcubierta finita; denotémosla por $I_{t_1}, ..., I_{t_n}$. Definimos

$$N_{y_0} = M_{t_1} \cap M_{t_2} \cap ... \cap M_{t_n}.$$

Entonces N_{y_0} es una vecindad abierta de y_0. También la cubierta abierta $I_{t_1}, ..., I_{t_n}$ tiene un número de Lebesgue λ, esto es, si $0 < \delta < \lambda$ y $A \subset I$ tiene diámetro menor que δ entonces $A \subseteq I_{t_i}$ para algun $i = 1, ..., n$. Entonces partimos I de la siguiente manera.

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1 \text{ tal que } t_i - t_{i-1} < \delta \text{ para toda } i = 1, ..., m.$$

entonces $[t_{i-1}, t_i] \subseteq I_{t_k}$ para algún $k = 1, ..., n$ y para cada $i = 1, ..., m$.

Así $N_{y_0} \times [t_{i-1}, t_i] \subseteq M_{t_k} \times I_{t_k}$ para algún $k = 1, ..., n$ y para cada $i = 1, ..., m$ entonces $F(N_{y_0} \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq F(M_{t_k} \times I_{t_k}) \subseteq U_t$ donde U_t es una vecindad admisible de X que depende de $i = 1, ..., m$.

Es suficiente ahora construir funciones continuas $G_i : N_y \times [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \tilde{X}$ para $i = 1, ..., m$ tales que para cada $y \in Y$ fijo:

(i) $pG_i = F|_{N_y \times [t_{i-1}, t_i]}$ para cada $i = 1, .., m$

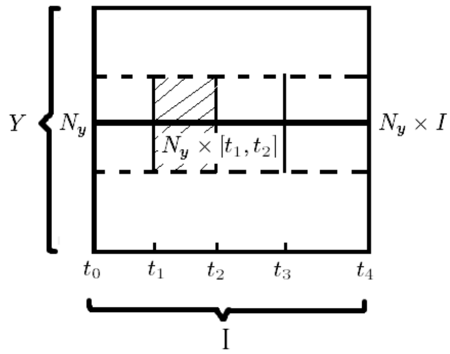
(ii) $G_1(y', 0) = \tilde{f}(y')$ para toda $y' \in N_y$

(iii) $G_{i-1}(y', t_{i-1}) = G_i(y', t_{i-1})$ para toda $y' \in N_y$ y para toda $i = 2, ..., m$

pues tales funciones pueden pegarse y dan como resultado

$$\tilde{F}_y : N_y \times I \longrightarrow \tilde{X}$$

con las propiedades requeridas (Se pueden pegar por (iii) y porque $N_y \times [t_{i-1}, t_i]$ es cerrado en $N_y \times I$).



Para definir $G_1 : N_y \times [0, t_1] \longrightarrow \tilde{X}$ sea U una vecindad admisible abierta con $F(N_y \times [0, t_1]) \subseteq U$. Sea $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ el conjunto de hojas de $\tilde{X}$ sobre U.

Afirmamos que $\{\tilde{f}^{-1}(S_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta de conjuntos ajenos de N_y.

En efecto, $F(N_y \times [0, t_1]) \subseteq U$ entonces $p\tilde{f}(N_y) = F(N_y \times \{0\}) \subseteq U$ esto implica que $p^{-1}(p\tilde{f}(N_y)) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ entonces $\tilde{f}(N_y) \subseteq p^{-1}(p\tilde{f}(N_y)) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ por tanto $\mathrm{N}_y \subseteq \tilde{f}^{-1}(f(N_y)) \subseteq \tilde{f}^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(S_\lambda)$.

Por lo tanto $N_y \subseteq \tilde{f}^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{f}^{-1}(S_\lambda)$

Definimos $G_1 : N_y \times [0,t_1] \to X$ en el abierto $\tilde{f}^{-1}(S_\lambda) \times [0,t_1] \subseteq N_y \times [0,t_1]$ por la composicion

$$\tilde{f}^{-1}(S_\lambda) \times [0,t_1] \xrightarrow{\mathrm{F}} U \xrightarrow{(p|_{S_\lambda})^{-1}} S_\lambda$$

Dicho de otra forma $G_1(y',t) = (p|_{S_\lambda})^{-1}F(y',t)$ si $y' \in \tilde{f}^{-1}(S_\lambda), t \in [0,t_1]$.
G_1 está bien definida pues $\tilde{f}^{-1}(S_\lambda) \cap \tilde{f}^{-1}(S_{\lambda'}) = \varnothing$ para todo $\lambda \neq \lambda'$ y es continua pues es la restricción de una función continua.

Además, G_1 satisface (i):

Sea $y' \in N_y, t \in [0,t_1]$ entonces $y' \in \tilde{f}^{-1}(S_\lambda)$ para algún $\lambda \in \Lambda$ entonces $pG_1(y',t_1) = p(p|_{S_\lambda})^{-1}F(y',t) = (p|_{S_\lambda})(p|_{S_\lambda})^{-1}F(y',t) = F(y',t)$
por lo tanto G_1 satisface (i).

G_1 satisface (ii):

Sea $y' \in N_y$ entonces $y' \in \tilde{f}^{-1}(S_\lambda)$ para algún $\lambda \in \Lambda$. entonces $f(y') \in S_\lambda$
esto implica que

$$\begin{aligned} G_1(y',0) &= (p|_{S_\lambda})^{-1}F(y',0) \\ &= (p|_{S_\lambda})^{-1}p\tilde{f}(y') \\ &= (p|_{S_\lambda})^{-1}(p|_{S_\lambda})\tilde{f}(y') \\ &= \tilde{f}(y') \end{aligned}$$

por lo tanto G_1 satisface (ii).

Construiremos $G_2 : N_y \times [t_1,t_2] \longrightarrow \tilde{X}$:

Sea U' tal que $F(N_y \times [t_1,t_2]) \subseteq U'$ y sea $G_1' : N_y \longrightarrow \tilde{X}$ definida por

$$G_1'(y') = G_1(y',t_1) \text{ para todo } y' \in N_y.$$

Sea $\{S_{\lambda'}\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ el conjunto de hojas de $\tilde{X}$ sobre U'.
Afirmamos que $\{G_1'^{-1}(S_{\lambda'})\}_{\lambda'\in\Lambda'}$ es una cubierta de abiertos ajenos de N_y.

Tenemos que $F(N_y \times [t_1,t_2]) \subseteq U'$ entonces $F(y',t_1) \subseteq U'$ para todo $y' \in N_y$ esto implica que $p^{-1}F(y',t_1) \subseteq p^{-1}(U') = \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} S_{\lambda'}$ para todo $y' \in N_y$ entonces $p^{-1}(pG_1(y',t_1)) \subseteq \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} S_{\lambda'}$ por tanto $G_1'(y') \equiv G_1(y',t_1) \in p^{-1}p(G_1(y',t_1)) \subseteq \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} S_{\lambda'}$ para todo $y' \in N_y$ esto es, $G_1'(N_y) \subseteq \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} S_{\lambda'}$ lo cual tenemos que $N_y \subseteq G_1'^{-1}(\bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} S_{\lambda'}) = \bigcup_{\lambda'\in\Lambda'} G_1'^{-1}(S_{\lambda'})$

Por lo tanto $\{G_1'^{-1}(S_{\lambda'})\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ es una cubierta de abiertos ajenos de N_y.

Definimos $G_2 : N_y \times [t_1, t_2] \longrightarrow \tilde{X}$ en el abierto $G_1'^{-1}(S_{\lambda'}) \times [t_1, t_2] \subseteq N_y \times [t_1, t_2]$ por la composición;

$$G_1'^{-1}(S_{\lambda'}) \times [t_1, t_2] \xrightarrow{F} U' \xrightarrow{(p|_{S_{\lambda'}})^{-1}} S_{\lambda'}$$

Dicho de otra forma,

$$G_2(y', t) = (p|_{S_{\lambda'}})^{-1} F(y', t)$$

si $y' \in G_1'^{-1}(S_{\lambda'}), t \in [t_1, t_2]$.

Veremos ahora que G_2 satisface (i):
Sea $y' \in N_y, t \in [t_1, t_2]$ entonces $y' \in G_1'^{-1}(S_{\lambda'})$ para algún $\lambda' \in \Lambda'$,

$$\begin{aligned} pG_2(y', t) &= p(p|_{S_\lambda})^{-1} F(y', t) \\ &= (p|_{S_{\lambda'}})(p|_{S_{\lambda'}})^{-1} F(y', t) \\ &= F(y', t) \end{aligned}$$

Por lo tanto G_2 satisface (i).

G_2 satisface (iii):

Sea $y' \in N_y$. Entonces $y' \in G_1'^{-1}(S_{\lambda'})$ para alguna $\lambda' \in \Lambda'$ implica que $G_1'(y') \in S_{\lambda'}$ por tanto $G_1(y', t_1) \in S_{\lambda'}$.
Entonces,

$$\begin{aligned} G_2(y', t_1) &= (p|_{S_{\lambda'}})^{-1} F(y', t_1) \\ &= (p|_{S_{\lambda'}})^{-1} pG_1(y', t_1) \\ &= (p|_{S_{\lambda'}})^{-1} (p|_{S_{\lambda'}}) G_1(y', t_1) \\ &= G_1(y', t_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto G_2 satisface (iii).

Continuamos así hasta definir todos los G_i.

■

Observación 2.8. *Bajo las condiciones del teorema 2.7 tenemos $g : Y \longrightarrow X$ por $g(y) = F(y, 1)$ y $\tilde{g}(y) : Y \longrightarrow \tilde{X}$ por $\tilde{g}(y) = \tilde{F}(y, 1)$. Entonces $p\tilde{g} = g$ y $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ mediante F. Por tanto, si $f \simeq g$ entonces sus respectivos levantamientos $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son homotópicos también.*

Corolario 2.9. *(Levantamiento de trayectorias relativas).*
Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X y sean x_0, x_1 puntos en X. Sean $f, g : I \longrightarrow X$ trayectorias en X de x_0 a x_1 y sea $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$.

(i) *Si $F : I \times I \longrightarrow X$ es una homotopía relativa $F : f \simeq g$ rel $\{0, 1\}$ entonces existe una única función continua $\tilde{F} : I \times I \longrightarrow \tilde{X}$ con $p\tilde{F} = F$ y $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x_0}$, y además:*

(ii) *Si $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ son levantamientos de f y g respectivamente, con $\tilde{f}(0) = \tilde{x_0} = \tilde{g}(0)$, entonces $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ y $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ rel $\{0, 1\}$.*

Demostración

(i) Por el teorema 2.6 (levantamiento de trayectorias) existe una única $\tilde{f}$ continua tal que

$$\begin{tikzcd}
& & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\
(I, 0) \arrow[r, "j"'] \arrow[urr, dashed, "\tilde{f}"] & (I \times I, (0, 0)) \arrow[r, "F"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Entonces por el teorema 2.7 existe $\tilde{F}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
& (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\
(I \times I, (0, 0)) \arrow[ur, "\tilde{F}"] \arrow[r, "F"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Por el lema 2.5, $\tilde{F}$ es única, esto es, $\tilde{F}$ es única tal que $p\tilde{F} = F$ con $\tilde{F}(0, 0) = \tilde{x_0}$.

(ii) Definimos $\tilde{F_0} : I \longrightarrow \tilde{X}$ por $\tilde{F_0}(t) = \tilde{F}(t, 0)$ entonces $p\tilde{F_0}(t) = p\tilde{F}(t, 0) = F(t, 0) = f(t)$.

Por tanto $p\tilde{F_0} = f$ y $\tilde{F}(0) = \tilde{F}(0, 0) = \tilde{x_0}$. Por el teorema 2.6 (levantamiento de trayectorias) tenemos que $\tilde{F_0} = \tilde{f}$, esto es, $\tilde{F}(t, 0) = \tilde{f}(t)$ para todo $t \in I$. Ahora, $\tilde{F}|_{\{0\}\times I}$ es una trayectoria en $\tilde{X}$ tal que $p\tilde{F}|_{\{0\}\times I} = F|_{\{0\}} \times I = x_0$ y $\tilde{F}|_{\{0\}\times I}(0) = \tilde{F}(0, 0) = \tilde{x_0}$. Entonces por el teorema 2.6 (levantamiento de trayectorias) tenemos que $\tilde{F}(0, t) = \tilde{x_0}$ para todo $t \in I$.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (I,0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}|_{\{0\}\times I}"] \arrow[r, "x_0"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (I,0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{x_0}"] \arrow[r, "x_0"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Similarmente $\tilde{F}|_{\{1\}\times I}$ es la trayectoria constante en $\tilde{f}(1)$ pues tenemos que $p\tilde{F}|_{\{1\}\times I} = F|_{\{1\}\times I} = x_1$ y $\tilde{F}|_{\{1\}\times I}(0) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{F_0}(1) = \tilde{f}(1)$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{f}(1)) \arrow[d, "p"] \\ (I,0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}|_{\{1\}\times I}"] \arrow[r, "x_1"'] & (X, x_1) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{f}(1)) \arrow[d, "p"] \\ (I,0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}(1)"] \arrow[r, "x_1"'] & (X, x_1) \end{tikzcd}$$

y por el teorema 2.6 (levantamiento de trayectorias) tenemos que $\tilde{F}(1,t) = \tilde{f}(1)$ para todo $t \in I$.

Finalmente, sea $\tilde{F_1} : I \longrightarrow \tilde{X}$ definida por $\tilde{F_1}(t) = \tilde{F}(t,1)$. Entonces $p\tilde{F_1}(t) = p\tilde{F}(t,1) = F(t,1) = g(t)$ para todo $t \in I$.

Por tanto $p\tilde{F_1} = g$ y $\tilde{F_1}(0) = \tilde{F}(0,1) = \tilde{x_0}$ (pues $\tilde{F}|_{\{0\}\times I}$ es constante).
Entonces por el teorema 2.6 (levantamiento de trayectorias) tenemos que $\tilde{F_1} = \tilde{g}$,

esto es,

$$\tilde{F}(t,1) = \tilde{g}(t) \text{ para todo } t \in I.$$

Por tanto $\tilde{g}(1) = \tilde{F_1}(1) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{f}(1)$ y $\tilde{F} : f \simeq g$ rel $\{0,1\}$.

■

Al enunciado (ii) a veces se le llama Teorema de monodromía.

Recordemos que el grupo fundamental π_1 es un funtor, de espacios topológicos punteados a grupos. En particular si $\varphi : (X', x_0') \longrightarrow (X, x_0)$ es continua, entonces existe un homomorfismo, llamado homomorfismo unducido, $\varphi_* : \pi_1(X', x_0') \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ definido por $[f'] \longrightarrow [\varphi f']$.

Teorema 2.10. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X. Si $\tilde{x}_0 \in p|^{-1}(x_0)$ entonces*

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

es monomorfismo.

Demostración:

Probaremos que p_* tiene kernel trivial.
Sea $\tilde{f} : (I, \{0,1\}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ una lazo en $\tilde{X}$ basado en $\tilde{x_0}$, tal que

$$p_*[\tilde{f}] = [p\tilde{f}] = 1 = [x_0]$$

en $\pi_1(X, x_0)$. Entonces por la definición de relación de equivalencia, existe una homotopía relativa

$$F : p\tilde{f} \simeq x_0 \; rel \; \{0,1\}.$$

Notemos que $\tilde{f}$ y $\tilde{x_0}$ son levantamientos de $p\tilde{f}$ y x_0 respectivamente tales que $\tilde{f}(0) = \tilde{x_0} = \tilde{x_0}(0)$. Entonces por el corolario 2.9 existe un levantamiento $\tilde{F}$ de F

$$\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{x_0} \; rel \; \{0,1\}.$$

Por tanto $[\tilde{f}] = [\tilde{x}_0] = 1$, se sigue que p_* es un monomorfismo.

■

En el caso particular del espacio cubriente $(\mathbb{R}, exp)$ de S^1, el corolario 2.9 permite definir la función grado

$$\delta : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$$

por $[f] \longrightarrow \tilde{f}(1)$ donde $\tilde{f}$ es el levantamiento de f tal que $\tilde{f}(0) = 0 \in \mathbb{R}$. (Esto es, δ está bién definida pues si $[g] \in \pi_1(S^1, 1)$ es tal que $g \simeq f$ rel $\{0,1\}$ y $\tilde{g}$ es el levantamiento de g tal que $\tilde{g}(0) = 0 \in \mathbb{R}$ entonces por el corolario 2.9 (levantamiento de homotopías) tenemos que $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ rel $\{0,1\}$. En particular $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Por tanto δ está bien definida.)

2.4. La acción del grupo fundamental

Definición 2.11. *Sea G un grupo y sea Y un conjunto. Entonces G actúa por la izquierda en Y si existe una función.*

$$G \times Y \longrightarrow Y$$

denotada por

$$(g, y) \longmapsto g \cdot y,$$

tal que

1. *$(gg') \cdot y = g \cdot (g' \cdot y)$ para todo $y \in Y$ y para todo $g, g' \in G$*
2. *$1 \cdot y = y$*

Aquí 1 es la identidad en G.
Llamamos a Y un G-conjunto si G actúa en Y.

Definición 2.12. *Decimos que G actúa transitivamente en Y si, para cada $y, y' \in Y$ existe $g \in G$ con $g \cdot y = y'$. Llamamos a Y un G-conjunto transitivo en este caso.*

Observación 2.13. *Sea G un grupo que actúa en un conjunto Y. Para cada $g \in G$ la función $\theta_g : Y \longrightarrow Y$ definida por $\theta_g : y \longrightarrow g \cdot y$ es una permutación de Y (su inverso es $\theta_{g^{-1}}$). Notemos que si Y es un $G-$espacio entonces θ_g es un homeomorfismo para toda $g \in G$.*

Definición 2.14. *Sea G un grupo que actúa en un conjunto Y, y sea $y \in Y$. Entonces la órbita de Y es*

$$O(y) = \{g \cdot y | g \in G\} \subseteq Y.$$

y el estabilizador de y (también llamado el subgrupo de isotropía de y) es

$$G_y = \{g \in G | g \cdot y = y\} \subseteq G.$$

Lema 2.15. *G actúa transitivamente en Y si y sólo si $O(y) = Y$ para todo $y \in Y$.*

Demostración:

Supongamos que G actúa transitivamente en Y y sea $y \in Y$entonces existe $g \in G$ tal que $g \cdot y = y'$. Entonces $y' \in O(y)$ y por tanto $Y \subseteq O(y)$

Luego como claramente $O(y) \subseteq Y$ se tiene que $Y = O(Y)$
Ahora, supongamos que $O(y) = Y$ para todo $y \in Y$ y sean $y, y' \in Y$entonces $y \in O(y')$ esto implica que $y = gy'$ para algún $g \in G$.
Por lo tanto G actúa transitivamente.

■

Lema 2.16. *Si un grupo G actúa en un conjunto Y entonces para cada $y \in Y$,*

$$|O(y)| = [G : G_y]$$

donde $|O(y)|$ es el orden de la órbita de Y y $[G : G_y]$ denota al índice de G_y en G En particular, si G actúa transitivamente, entonces $|Y| = [G : G_y]$.

Demostración:

Primero notemos que $g \cdot y = h \cdot y$ si y sólo si $(g^{-1}h) \cdot y = y$ así que es necesario y suficiente que $g^{-1}h \in G_y$ por lo tanto $gG_y = hG_y$.

Sea $\varphi : O(y) \longrightarrow G/G_y$ definida por $\varphi(g \cdot y) = gG_y$

- φ está bien definida.

  Tenemos que $g \cdot y = h \cdot y \in O(y)$ entonces $gG_y = hG_y$ por la observación anterior. Entonces $\varphi(g \cdot y) = \varphi(h \cdot y)$.

- φ es inyectiva.

  Sean $g \cdot y,\ h \cdot y \in O(y)$ tales que $\varphi(g \cdot y) = \varphi(h \cdot y)$ entonces $gG_y = hG_y$ implica que $g \cdot y = h \cdot y$ por la observación anterior.

  Por lo tanto φ es inyectiva

- φ es sobreyectiva

La clase lateral $gG_y \in G/G_y$ procede del elemento $g \cdot y \in O(y)$.

■

Nota: Si existe una función $G \times Y \longrightarrow Y$ denotada por $(g, y) \longmapsto y \cdot g$ tal que

$$y \cdot (gg') = (y \cdot g) \cdot g'$$
$$y \cdot 1 = y$$

para todo $y \in Y$ y $g, g' \in G$, llamamos a Y un G-conjunto derecho si tal función existe; llamamos a Y un G-conjunto izquierdo cuando la definición original se cumple. Nos vemos forzados a considerar ambos tipos de G-conjuntos por nuestra elección de notación. Cuando f y g son trayectorias, entonces $f * g$ significa primero recorrer f y luego g; cuando f y g son funciones entonces su composición $f \circ g$ significa aplicar g y luego f. No hay problema con esto, pues uno puede convertir un G-conjunto derecho en un G-conjunto definiendo:

$$g \cdot y = y \cdot g^{-1}$$

Notemos que la definición se cumple:

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot y) &= g \cdot (y \cdot g'^{-1}) \\ &= (y \cdot g'^{-1}) \cdot g^{-1} \\ &= y \cdot (g'^{-1} g^{-1}) \\ &= y \cdot (gg')^{-1} \\ &= (gg') \cdot y. \end{aligned}$$

Teorema 2.17. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $x_0 \in X$, y sea $Y = p^{-1}(x_0)$. Entonces;*

(i) $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en Y.

(ii) Si $\tilde{x}_0 \in Y$, entonces el estabilizador de $\tilde{x}_0$, $\pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$, es $p_* \, \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.

(iii) $|Y| = [\pi_1(X, x_0) : p_* \, \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})]$.

Demostración:

Probaremos primero que $Y = p^{-1}(x_0)$ es un $\pi_1(X, x_0)$- conjunto derecho.
Sean $[f] \in \pi_1(X, x_0), \tilde{x} \in Y = p^{-1}(x_0)$. Definamos

$$\cdot : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0) \text{ por } \tilde{x} \cdot [f] = \tilde{f}(1)$$

donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$. (por el teorema 2.6).

$\cdot$ está bien definida:

Note que $\tilde{f}(1) \in p^{-1}(x_0)$ pues $p\tilde{f}(1) = f(1) = f(0) = x_0$.
Sea $g \simeq f$ rel $\{0, 1\}$, (esto es, $[g] = [f]$) entonces $\tilde{x}\cdot\, [g] = \tilde{g}(1)$ donde $\tilde{g}$ es el único levantamiento de g tal que $\tilde{g}(0) = \tilde{x}_0$. Así, por el corolario 2.9 (levantamiento de homotopías) tenemos que $\tilde{g} \simeq \tilde{f}$ rel $\{0, 1\}$ y $\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)$. Por lo tanto $\tilde{x}\cdot[g] = \tilde{x}\cdot[f]$.

$\cdot$ es acción.

Sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ y sea $[x_0] \in \pi_1(X, x_0)$ donde x_0 es la trayectoria constante entonces $\tilde{x} \cdot [x_0] = \tilde{x}$ pues $p\tilde{x} = x_0$ con $\tilde{x}(0) = \tilde{x}$.

Por lo tanto $\tilde{x} \cdot [x_0] = \tilde{x}$ para todo $\tilde{x} \in Y = p^{-1}(x_0)$.

Sean $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ y sea $\tilde{x} \in Y = p^{-1}(x_0)$.
Sea $\tilde{f}$ el levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$ y sea $\tilde{g}$ el levantamiento de g con $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(1)$. Entonces $\tilde{f} * \tilde{g}$ es el levantamiento de $f * g$ tal que $(f * g)(0) = \tilde{x}$; en efecto, pues recuerde que:

$$\tilde{f}*\tilde{g}(t) = \begin{cases} \tilde{f}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{g}(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \text{entonces } p(\tilde{f}*\tilde{g})(t) = \begin{cases} p\tilde{f}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p\tilde{g}(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} = f * g(t).$$

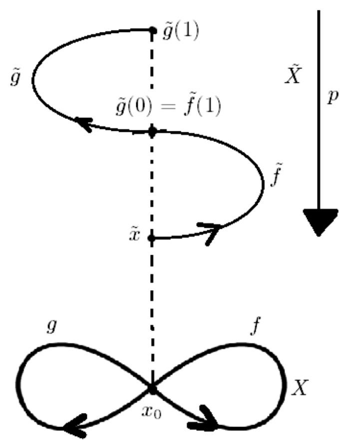
Entonces

$\tilde{x} \cdot [f][g] = \tilde{x} \cdot [f * g] = \tilde{f} * \tilde{g}(1) = \tilde{g}(2(1) - 1) = \tilde{g}(1)$. Por otra parte,
$(\tilde{x} \cdot [f]) \cdot [g] = \tilde{f}(1) \cdot [g] = \tilde{g}(1)$ pues $\tilde{g}$ es el levantamiento de g tal que $\tilde{g}(0) = \tilde{f}(1)$.

Por lo tanto $\tilde{x} \cdot [f][g] = (\tilde{x} \cdot [f]) \cdot [g]$ para todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, y $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$

así tenemos que $\cdot$ es acción.

Geométricamente tenemos lo siguiente:



(i) Demostraremos que $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$.

Sean $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$. Dado que $\tilde{X}$ es conexo por trayectorias (note que es la primera vez que usamos esta propiedad de $\tilde{X}$ de ser espacio cubriente) existe una trayectoria $\tilde{\lambda} : I \longrightarrow \tilde{X}$ de $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x_1}$ (es decir, $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}$ y $\tilde{\lambda}(1) = \tilde{x_0}$) entonces $p\tilde{\lambda}$ es una trayectoria cerrada en X con punto base x_0 cuyo levantamiento con punto inicial $\tilde{x_0}$ es $\tilde{\lambda}$. Entonces $[p\tilde{\lambda}] \in \pi_1(X, x_0)$ y $x_0 \cdot [p\tilde{\lambda}] = \tilde{\lambda}(1) = \tilde{x}$.

Por lo tanto $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$.

(ii) Probaremos que:
$\pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0} = \{[f] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde{x_0} \cdot [f] = \tilde{x_0}\} = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.

Si f es una trayectoria cerrada en X basada en x_0, denotaremos por $\tilde{f}$ el levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x_0}$.

($\subseteq$) Sea $[f] \in \pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}$; el estabilizador de $\tilde{x_0}$,

entonces $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{f}(1)$. Pero $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0 = \tilde{f}(1)$ por lo tanto $[\tilde{f}] \in \pi_1(X, x_0)$

implica que $[f] = [p\tilde{f}] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

($\supseteq$) Sea $[f] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ entonces $[f] = [p\tilde{g}]$ para algún $[\tilde{g}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$

$$\begin{aligned} \text{implica que } \tilde{x_0} \cdot [f] &= \tilde{x_0} \cdot [p\tilde{g}] \\ &= \tilde{g}(1) \text{ pues } \tilde{g} \text{ es el levantamiento de } p\tilde{g} \text{ tal que } \tilde{g}(0) = \tilde{x_0}. \\ &= \tilde{x_0} \text{ pues } \tilde{g}(0) = \tilde{g}(1) = \tilde{x_0}. \end{aligned}$$

Entonces $[f] \in \pi_1(X, x)_{\tilde{x}_0}$.

(iii) Por (i), $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$ entonces por el lema 2.16 se tiene que

$$|Y| = [\pi_1(X, x_0) : \pi_1(X, x_0)_{\tilde{x}_0}] = [\pi_1(X, x_0) : p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})].$$

Donde la última igualdad se cumple por (ii)

■

Recordemos que un espacio topológico es simplemente conexo si es conexo por trayectorias y su grupo fundamental es el grupo trivial.

Corolario 2.18. *Si $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ es un cubriente donde $\tilde{X}$ es simplemente conexo, entonces el número de hojas es igual al orden de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración:

Supongamos que $\tilde{X}$ es simplemente conexo, esto quiere decir que, es conexo por trayectorias y que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$ entonces por (iii) del teorema 2.17 tenemos que

$$
\begin{aligned}
|p^{-1}(x_0)| &= [\pi_1(X, x_0) : p_* \, \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})] \\
&= [\pi_1(X, x_0) : 1] \\
&= [\pi_1(X, x_0)]
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.19. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, sea $x_0, x_1 \in X$.*
Entonces $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_1)|$.

Demostración:
Sea $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ y $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_1)$, sea $\tilde{\lambda}$ una trayectoria en $\tilde{X}$ de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1$ y sea $\lambda = p\tilde{\lambda}$ la correspondiente trayectoria en X de x_0 a x_1.

Afirmamos que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[r, "\widetilde{\lambda}_*", "\cong"'] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\cong", "\lambda_*"'] & \pi_1(X, x_1)
\end{tikzcd}
\tag{2.10}
$$

donde $\tilde{\lambda}_*[\tilde{f}] = [\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f}\tilde{\lambda}]$ y $\lambda_*[f] = [\lambda^{-1}f\lambda]$.

En efecto; sea $[\tilde{f}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
p_*\widetilde{\lambda}_*[f] &= p_*[\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f}\tilde{\lambda}] \\
&= p_*[\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f}\tilde{\lambda}] \\
&= [p(\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f}\tilde{\lambda})] \\
&= [p\widetilde{\lambda}^{-1} * p\tilde{f} * p\tilde{\lambda}] \\
&= [\lambda^{-1}p\tilde{f}\lambda] \\
&= \lambda_* p_*[\tilde{f}].
\end{aligned}
$$

(donde la cuarta igualdad se cumple pues recordemos que el producto de $(\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f})\tilde{\lambda}$ de tres lazos está dado como;

$$(\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f}\tilde{\lambda}) = \begin{cases} \tilde{\lambda}^{-1}(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \tilde{f}(4s-1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\lambda}\text{(2s-1)} & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \text{ entonces } p(\tilde{\lambda}^{-1}\tilde{f}\tilde{\lambda}) = \begin{cases} p\tilde{\lambda}^{-1}(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ p\tilde{f}(4s-1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ p\tilde{\lambda}\text{(2s-1)} & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= p\tilde{\lambda}^{-1} * p\tilde{f} * p\tilde{\lambda}.)$$

Por lo tanto, el diagrama conmuta.

Afirmación: Tenemos una biyección

$$\varphi : \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$$

definida por

$$[f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longmapsto (\lambda *[f])p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$$

- φ está bien definida:

Es claro del hecho de que $\lambda_*(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$, veamoslo en detalle:

Sean $[f]\ p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}),\ [g]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \in \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ tales que

$$[f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = [g]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$$

entonces $[f][g]^{-1} \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.
Implica que $[fg^{-1}] = p_*[h] = [ph]$ para algún $[h] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$. Entonces
$\lambda_*[fg^{-1}] = \lambda_*[ph] = \lambda_* p_*[h] = p_*\tilde{\lambda}_*[h]$ con $\tilde{\lambda}_*[h] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ donde la última igualdad se cumple porque el diagrama de la afirmación conmuta. Por tanto
$\lambda_*[fg^{-1}] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$. Pero, $\lambda_*[fg^{-1}] = \lambda_*[f](\lambda_*[g])^{-1}$ entonces
$\lambda_*[f](\lambda_*[g])^{-1} \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ esto es, $\lambda_*[f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) = \lambda_*[g]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$.
implica que $\varphi([f]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = \varphi([g]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$.

Por lo tanto φ está bien definida.

- φ es uno a uno

Es consecuencia del hecho de que cualquier elemento $[a] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que
$\lambda_*[a] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ cumple que $p_*(\tilde{\lambda}_*^{-1} p_*^{-1} \lambda_*[a]) = [a]$.
Por lo tanto $[a] \in p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$;
Veamoslo en detalle:

$\varphi([f]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})) = \varphi([g]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0}))$.

Entonces $(\lambda_*[f])p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1}) = (\lambda_*[g])p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1})$ esto implica que $(\lambda_*[f])(\lambda_*[g])^{-1} \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1})$ entonces $(\lambda_*[f])(\lambda_*[g^{-1}]) \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1})$ por tanto $\lambda_*[fg^{-1}] \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1})$ usando esto último y el diagrama conmutativo probaremos la siguiente afirmación.
El elemento $\tilde{\lambda}_*^{-1}p_*^{-1}\lambda_*[fg^{-1}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})$ es tal que

$$p_*(\tilde{\lambda}_*^{-1}p_*^{-1}\lambda_*[fg^{-1}]) = [fg^{-1}].$$

En efecto, pues

$$\begin{aligned}\lambda_*p_*(\tilde{\lambda}_*^{-1}p_*^{-1}\lambda_*[fg^{-1}]) &= p_*\tilde{\lambda}_*(\tilde{\lambda}_*^{-1}p_*^{-1}\lambda_*[fg^{-1}]) \\ &= \lambda_*[fg^{-1}].\end{aligned}$$

donde la primera igualdad se cumple porque el diagrama de la afirmación conmuta.
Dado que λ_* es isomorfismo, entonces p$_*(\tilde{\lambda}_*^{-1}p_*^{-1}\lambda_*[fg^{-1}]) = [fg^{-1}]$
esto implica que $[fg^{-1}] \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})$ entonces $[f][g]^{-1} \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})$ por tanto $[f]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0}) = [g]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_o})$.

Por lo tanto φ es inyectiva.

- φ es sobre

Claro, pues si $[g]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1}) \in \pi_1(X,x_1)/p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1})$
entonces

$$[\lambda g\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0}) \in \pi_1(X,x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})$$

es tal que

$$\begin{aligned}\varphi([\lambda g\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})) &= \lambda_*[\lambda g\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1}) \\ &= [\lambda^{-1}\lambda g\lambda^{-1}\lambda]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1}) \\ &= [g]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es una biyección; esto es,

$$[\pi_1(X,x_0) : p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})] = [\pi_1(X,x_1) : p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_1})]$$

Aplicando el teorema 2.17(iii) tenemos que

$$|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x_1)|$$

■

Hemos probado que todas las fibras en un espacio cubriente tienen la misma cardinalidad. Dado que cada fibra es discreta, tenemos que cualquier par de fibras son homeomorfas.

Definición 2.20. *La multiplicidad de un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de X es el cardinal de una fibra. Si la multiplicidad es m, también se dice que $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X de m-hojas.*

Definición 2.21. *El plano proyectivo P^n es el espacio cociente obtenido de S^n identificando cada punto x de S^n con su punto antipoda $-x$.*

(S^n, p) es un espacio cubriente de $\mathbb{R}P^n$ donde p es la aplicación que identifica puntos antipodas.

Corolario 2.22. *Si $n \geq 2$, entonces $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Demostración:
Sabemos que (S^n, p) es un espacio cubriente de $\mathbb{R}P^n$ de multiplicidad 2. Como se puede ver en [4] pag. 282

por tanto $[\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) : p_*\pi_1(S^n, \tilde{x_0})] = 2$. Dado que S^n es simplemente conexo para todo $n \geq 2$ entonces$|\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0)| = 2$.

Por lo tanto $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

■

Corolario 2.23. *Sea $(\tilde{X}, p)$ espacio cubriente de X, sea $x_0 \in X$ y sea $Y = p^{-1}(x_0)$.*

(i) Si $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in Y$, entonces $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

(ii) Si S es un subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ que es conjugado de $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ para algún $\tilde{x}_0 \in Y$, entonces existe $\tilde{x}_1 \in Y$ tal que $S = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$.

Demostración:
(i) Recuerde el diagrama conmutativo del teorema 2.19 (con $x_0 = x_1$)

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[r, "\tilde{\lambda}_*", "\cong"'] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\cong", "\lambda_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

donde $\tilde{\lambda}_*[\tilde{f}] = [\tilde{\lambda}^{-1} f \tilde{\lambda}]$ y $\lambda_*[f] = [\lambda^{-1} f \lambda]$ y donde $\tilde{\lambda}$ es una trayectoria en $\tilde{X}$ de $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x_1}$ y $\lambda = p\tilde{\lambda}$.

Entonces

$$p_*\tilde{\lambda}_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) = \lambda_* p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = [\lambda^{-1}] p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda]$$

y así los subgrupos $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ son conjugados por $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$.
(Note que λ es una trayectoria cerrada en x_0 pues $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in Y = p^{-1}(x_0)$.)

(ii) Suponga que $S = [\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda]$ con $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$. Sea $\tilde{\lambda}$ la única trayectoria en $\tilde{X}$ tal que $p\tilde{\lambda} = \lambda$ y $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}$. Note que $\tilde{\lambda}(1) \in Y \equiv p^{-1}(x_0)$ (pues $p\tilde{\lambda} = \lambda$), digamos, $\tilde{\lambda(1)} \equiv \tilde{x_1}$.
Usando el diagrama conmutativo en el teorema 2.19 tenemos
$S = [\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda] = \lambda_* p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\tilde{\lambda}_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$.

■

2.5. Espacio cubriente regular

Definición 2.24. *Un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de X es regular si $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$ para todo $x_0 \in X$*

Observación 2.25. *Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente regular de X, entonces $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ para todo $\tilde{x_0}, \tilde{x_1}$ en la misma fibra.*

Demostración:
Por el corolario 2.23(i) $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) = [\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda]$ para alguna $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$. Pero como además $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \lhd \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

■

Observación 2.26. *Si $\tilde{X}$ es simplemente conexo, entonces $(\tilde{X}, p)$ es regular.*

Demostración:
Como $\tilde{x}$ es simplemente conexo, entonces tenemos que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\}$. Así, $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*(1) = 1$. Por lo tanto $(\tilde{X}, p)$ es regular.

■

Capítulo 3

Transformaciones cubrientes.

En esta sección investigaremos aplicaciones entre espacios cubrientes de un espacio X. Empezamos por recordar el teorema 2.7 (levantamiento de homotopías.) Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua que tiene un levantamiento $\tilde{f} : Y \longrightarrow X$, entonces cualquier homotopía que empiece con f se puede levantar a una homotopía que empiece con $\tilde{f}$. Así, si $f \simeq g$ y f tienen un levantamiento $\tilde{f}$, entonces g tiene un levantamiento $\tilde{g}$ y $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$. El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para que $f : Y \longrightarrow X$ tenga un levantamiento.

3.1. Criterio de levantamiento

Teorema 3.1. *(Criterio de levantamiento).*
Sea Y localmente conexo por trayectorias, y sea $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ continua. Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, entonces existe un único $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ (donde $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$) levantamiento de f si y sólo si $f_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Demostración:
Supongamos que existe un levantamiento $\tilde{f}$ de f, esto es, $p\tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$. Entonces por funtorialidad tenemos el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Entonces $f_* \pi_1(Y, y_0) = p_* \tilde{f}_* \pi_1(Y, y_0) \subseteq p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.

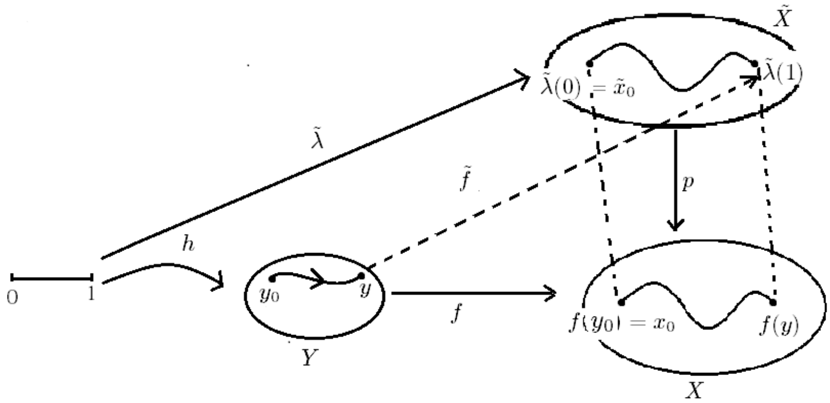
Por otro lado, supongamos ahora que $f_*\pi_1(Y,y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})$. Probaremos que existe un único $\tilde{f} : (Y,y_0) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x_0})$ levantamiento de f, el lema 2.5 nos dice que de existir el levantamiento es único (pues Y es conexo) por lo que sólo necesitamos considerar la existencia.

Recordemos que un espacio conexo y localmente conexo es conexo por trayectorias.
Por lo tanto Y es conexo por trayectorias.

Sea $y \in Y$ y sea $h : I \longrightarrow Y$ una trayectoria de y_0 a y, así fh es una trayectoria de $f(y_0) = x_0$ a $f(y)$.
Por el teorema de levantamiento de trayectorias existe un único levantamiento $\tilde{\lambda}$ en $\tilde{X}$ que levanta a fh y con $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}$.
Notemos que definiendo $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ por $\tilde{f}(y) = \tilde{\lambda}(1)$. se cumple que $p\tilde{f}(y) = p\tilde{\lambda}(1) = fh(1) = f(y)$ esto es, $\tilde{f}$ es un levantamiento de f.
Pobaremos que $\tilde{f}$ está bien definida, es decir, no depende de la elección de la trayectoria h y que efectivamente es continua.

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "h"'] \arrow[urr, dashed, "\tilde{\lambda}"] & Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & X \end{tikzcd}$$

Como se muestra en la siguiente imagen



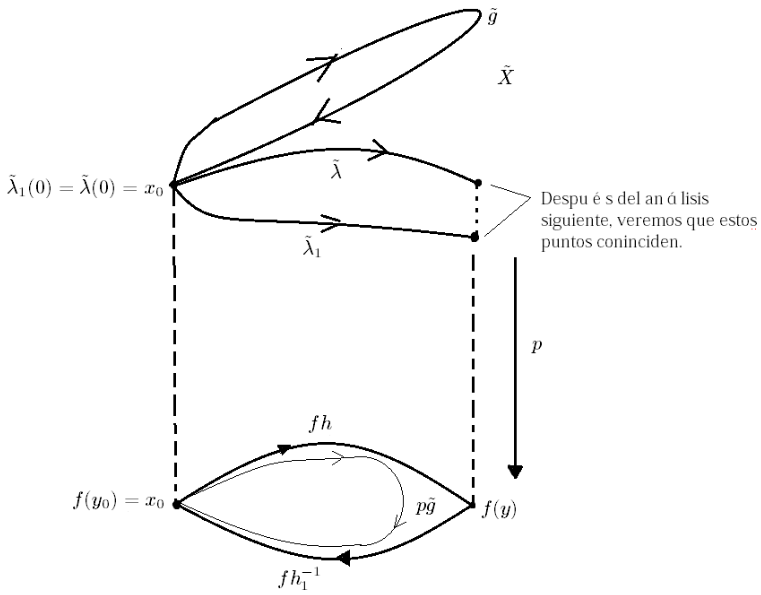
Para ver que $\tilde{\lambda}(1)$ es independiente de la elección de la trayectoria h sea h_1 otra trayectoria de y_o a y, y sea $\tilde{\lambda}_1$ la única trayectoria en $\tilde{X}$ tal que $p\tilde{\lambda}_1 = fh_1$ con $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}$. Entonces $h * h_1^{-1}$ es un lazo en Y basado en y_0. Así, $f(h * h^{-1}) = (f \circ h) * (f \circ h_1^{-1})$ es un lazo en X basado en $f(y_0) = x_0$.

Dado que $[(f \circ h) * (f \circ h_1^{-1})] = f_*[h * h_1^{-1}] \in f_*\pi_1(Y,y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0})$
(la inclusión es por hipótesis), entonces,

$$[(f \circ h) * (f \circ h_1^{-1})] = p_*[\tilde{g}] = [p\tilde{g}] \text{ para algún } [\tilde{g}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x_0}).$$

esto es, $\tilde{g}$ es un lazo en $\tilde{X}$ basado en $\tilde{x_0}$

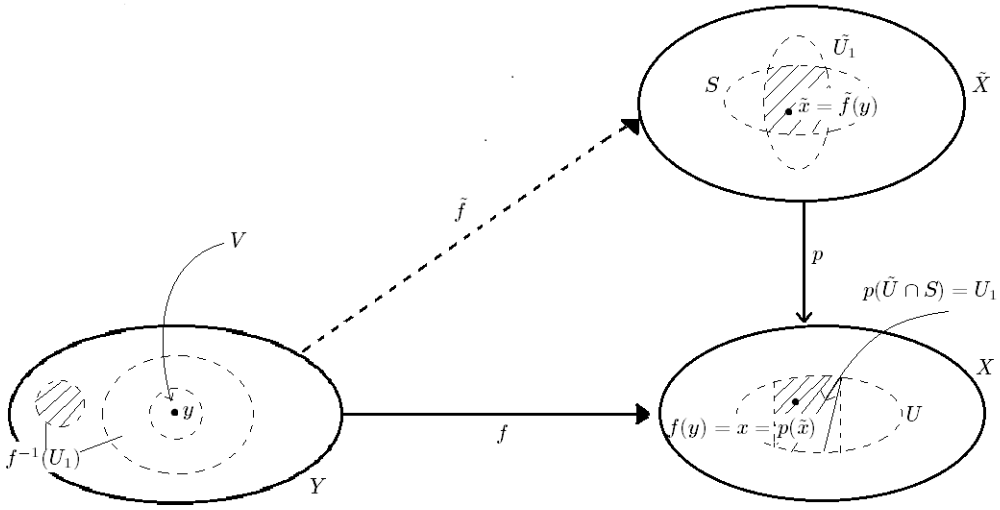
entonces $(f \circ h) * (f \circ h_1^{-1}) \simeq p\tilde{g}\, rel\ \{0,1\}$ esto implica que
$(f \circ h) * (f \circ h_1^{-1}) * p\tilde{\lambda}_1 \simeq p\tilde{g} * p\tilde{\lambda}_1\ rel\{0,1\}$ entonces $f \circ h \simeq p\tilde{g} * p\tilde{\lambda}_1\ rel\ \{0,1\}$ pues $p\tilde{\lambda}_1 = f \circ h_1$ así $f \circ h \simeq p(\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1)\ rel\ \{0,1\}$ pues $p(\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1) = p\tilde{g} * p\tilde{\lambda}_1$.



Ahora, tenemos que $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1$ son levantamientos de $f \circ h$ y $p(\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1)$ respectivamente tales que $\tilde{\lambda}(0) = (\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1)(0) = \tilde{x_0}$. Por el corolario 2.9 tenemos $\tilde{\lambda} \simeq \tilde{g} * \tilde{\lambda}_1$ rel $\{0, 1\}$, en particular $\tilde{\lambda}(1) = (\tilde{g} * \tilde{\lambda}_1)(1) = \tilde{\lambda}_1(1)$ como queríamos probar.

Por lo tanto $\tilde{f}$ está bien definida.

Finalmente veremos que $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$ es continua. Sea $y \in Y$, sea $\tilde{x} = \tilde{f}(y)$, y sea $\tilde{U_1}$ una vecindad abierta de $\tilde{x}$, debemos encontrar una vecindad abierta V de y con $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}_1$. Sea $x = p\tilde{x} \in X$, sea U una vecindad admisible abierta de x, y sea S la hoja sobre U que contiene a $\tilde{x}$.
Remplazando $\tilde{U_1}$ por $\tilde{U_1} \cap S$ de ser necesario, podemos suponer que $\tilde{U_1} \subseteq S$ (recuerde que S es un conjunto abierto en $\tilde{X}$). Dado que p es una aplicación abierta, el conjunto U_1 definido por $p(\tilde{U_1})$ es una vecindad abierta de x con $U_1 \subseteq U$. Dado que f es continua, $f^{-1}(U_1)$ es una vecindad abierta de y en Y. Dado que Y es localmente conexo por trayectorias, entonces existe una vecindad abierta conexa por trayectarias V con $y \in V \subset f^{-1}(U_1)$. Afirmamos que $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U_1}$ lo cual completará la prueba.



Sea $h : I \longrightarrow Y$ una trayectoria de y_0 a y y $\tilde{\lambda}$ el levantamiento de fh con $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}$. Sea $v \in V$, dado que V es conexo por trayectorias existe una trayectoria $h_2 : I \longrightarrow V$ de y a v; así

$$h_2(I) \subseteq V \subseteq f^{-1}(U_1) \text{ y } fh_2(I) \subseteq U_1.$$

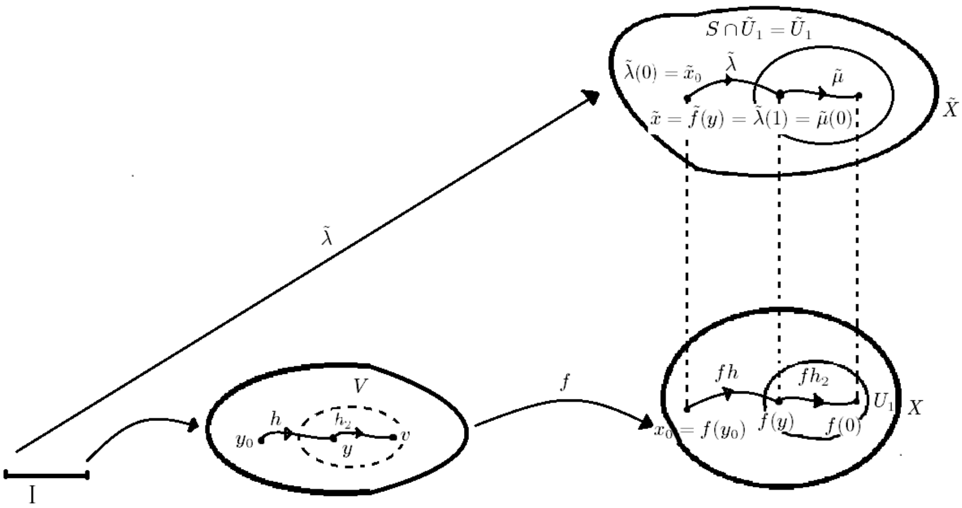
Sea $\tilde{\mu} : I \longrightarrow \tilde{X}$ el levantamiento de fh_2 con $\tilde{\mu}(0) = \tilde{x}$.
Dado que $U_1 \subseteq U$ y U es admisible entonces $\tilde{\mu} = (p|_S)^{-1}(fh_2)$ implica que $\tilde{\mu}(1) \in S \cap \tilde{U_1} = \tilde{U_1}$. Recuerde ahora que habíamos definido $\tilde{x} := \tilde{f}(y)$ donde $\tilde{f}(y) := \tilde{\lambda}(1)$ donde $\tilde{\lambda}$ es el único levantamiento de fh tal que $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}$.
Por tanto tenemos que $\tilde{\lambda}(1) = \tilde{x} = \tilde{\mu}(0)$, entonces $\tilde{\lambda} * \tilde{\mu}$ está definido.
Pero,

$$p(\tilde{\lambda} * \tilde{\mu}) = p\tilde{\lambda} * p\tilde{\mu} = fh * fh_2 = f(h * h_2)$$

donde $h * h_2$ es una trayectoria de y_0 a v; además

$$(\tilde{\lambda} * \tilde{\mu})(0) = \tilde{\lambda}(0) = \tilde{x_0}.$$

Por tanto $\tilde{f}(v) = (\tilde{\lambda} * \tilde{\mu})(1) = \tilde{\mu}(1) \in \tilde{U_1}$, como queríamos probar.



$\blacksquare$

Nota: El criterio de levantamiento es un ejemplo de un teorema bueno de topología algebraica. Un resultado topológico (en este caso la existencia de una cierta función continua) es equivalente a un problema algebraico (en este caso un subgrupo contenido en otro subgrupo).

Corolario 3.2. *Sea Y simplemente conexo y localmente conexo por trayectorias, y sea $f : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ continua. Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y si $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, entonces existe un único $\tilde{f} : (Y, y_0) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ que levanta a f.*

Demostración:

Se sigue directamente del teorema, pues dado que Y es simplemente conexo, $\pi_1(Y, y_0) = \{1\}$ entonces $f_*\pi_1(Y, y_0) = \{1\} \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$

$\blacksquare$

Observación 3.3. *Ponemos la hipótesis de que Y sea localmente conexo por trayectorias en el corolario 3.2 pues recuerde que un espacio simplemente conexo no necesariamente es localmente conexo por trayectorias.*

Corolario 3.4. *Sea X conexo y localmente conexo por trayectorias y sean $(\tilde{X}, p)$, $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes de X. Elijamos puntos base $x_0 \in X$, $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$ y $\tilde{y_0} \in \tilde{Y}$ con $p\tilde{x_0} = x_0 = q\tilde{y_0}$. Si $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, entonces existe una única función continua $h : (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ con $ph = q$. Además h es un homeomorfismo.*

Demostración:

Sabemos que $\tilde{Y}$ es conexo por trayectorias por definición de espacio cubriente, además $\tilde{Y}$ es localmente conexo por trayectorias pues $\tilde{Y}$ es localmente homeomorfo a X. También por hipótesis $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, así en particular $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, lo cual implica que existe por el teorema 3.1, una única función continua $h : (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ tal que el diagrama siguiente conmuta;

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "q"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Análogamente por ser $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ existe una única función continua $k : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ tal que el diagrama siguiente conmuta;

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[d, "q"] \\ (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0) \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Como (3.3) y (3.4) conmutan entonces,

$$\begin{tikzcd} (\tilde{X},\tilde{x_0}) \arrow[rr, "hk"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X},\tilde{x_0}) \arrow[dl, "p"] \\ & (X,x_0) & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Pero $id_{\tilde{X}} : (\tilde{X},\tilde{x_0}) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x_0})$ es tal que al sustituirla por hk en el último diagrama también lo hace conmutar. Pero por la unicidad de h y k dada por el teorema 3.1 entonces $hk = id_{\tilde{X}}$.
Análogamente $kh = id_{\tilde{Y}}$. Por lo tanto h es un homeomorfismo.

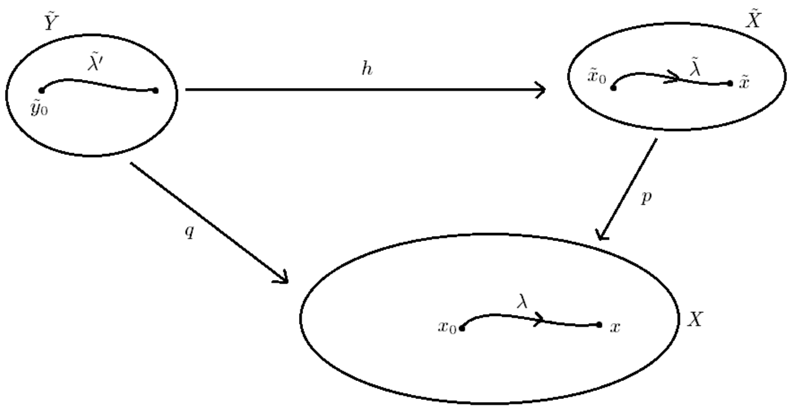
■

Observación 3.5. *Sea $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ continua y sea U un conjunto abierto en X que es parejamente cubierto por p. Si V es un subconjunto abierto de U, entonces V es parejamente cubierto por p.*

Observación 3.6. *Sean $(\tilde{Y},q)$ y $(\tilde{X},p)$ espacios cubrientes de X. Si existe una función continua $h : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ con $ph = q$, entonces h es sobreyectiva.*

(Usando el teorema 2.6 de levantamiento de trayectorias)
Sea $\tilde{y_0} \in \tilde{Y}$, $\tilde{x_0} = h(\tilde{y_0}), x_0 = p(\tilde{x_0})$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo;

$$\begin{tikzcd} (\tilde{Y},\tilde{y_0}) \arrow[dr, "h"] \arrow[ddr, "q"'] & \\ & (\tilde{X},\tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ & (X,x_0) \end{tikzcd}$$



Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y sea $\tilde{\lambda}$ una trayectoria de $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x}$. Sea $\lambda = p\tilde{\lambda}$, entonces λ es una trayectoria de $x_0 = p(\tilde{x_0})$ a $x = p(\tilde{x})$. Sea $\tilde{\lambda}' : I \longrightarrow \tilde{Y}$ el $q - levantamiento$ de λ tal que $\tilde{\lambda}'(0) = \tilde{y_0}$. Notemos que $h\tilde{\lambda}' : I \longrightarrow \tilde{X}$ es tal que $p(h\tilde{\lambda}') = q\tilde{\lambda}' = \lambda$ con $h\tilde{\lambda}'(0) = h(\tilde{y_0}) = \tilde{x_0}$, esto es, $h\tilde{\lambda}'$ es un $p - levantamiento$ de λ con $h\tilde{\lambda}'(0) = \tilde{x_0}$, por unicidad entonces, $h\tilde{\lambda}' = \tilde{\lambda}$. En particular $h(\tilde{\lambda}'(1)) = \tilde{\lambda}(1) = \tilde{x}$ con $\tilde{\lambda}'(1) \in \tilde{Y}$.

Por lo tanto h es sobreyectiva.

■

El siguiente teorema amplía el criterio de levantamiento. (Teorema 3.1) Y para probarlo usaremos la observación siguiente.

Observación 3.7. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X. Si X es Hausdorff, localmente compacto, localmente conexo o variedad topológica entonces también $\tilde{X}$ lo es, ya que toda propiedad local de X es heredado por $\tilde{X}$. Como se puede ver en [4] pag. 275.*

■

Teorema 3.8. *Sea X conexo y localmente conexo por trayectorias, sea $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes de X. Elijamos puntos base $x_0 \in X, \tilde{x_0} \in \tilde{X}$ y $\tilde{y_0} \in \tilde{Y}$ con $p\tilde{x_0} = x_0 = q\tilde{y_0}$.*
Si $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$, sea $h : (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0})$ una única funcion continua tal que $ph = q$. se cumple que $(\tilde{Y}, h)$ es un espacio cubriente de $\tilde{X}$, y así $\tilde{X}$ es un espacio cociente de $\tilde{Y}$.

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "q"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Demostración:

Por definición de espacio cubriente, ambos $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son conexos por trayectorias. Además X es localmente conexo por trayectorias entonces, por la observación 3.7, $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son también localmente conexos por trayectorias.
Dado que $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ entonces por el teorema 3.1 existe una única función continua.

$$h : (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \text{ tal que } ph = q.$$

Queda demostrar que $(\tilde{Y}, h)$ es un espacio cubriente de $\tilde{X}$; una vez demostrado esto último, aplicamos el lema 2.3 y obtenemos que h es identificación, de aquí que $\tilde{X}$ es un espacio cociente de $\tilde{Y}$.
Probemos pues, que $(\tilde{Y}, h)$ es un espacio cubriente de $\tilde{X}$. Sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $x = p\tilde{x} \in X$. Sea U_1 una vecindad abierta p-admisible de x y sea U_2 una vecindad abierta q-admisible de x.

Entonces $U_1 \cap U_2$ es una vecindad abierta de x, y dado que X es localmente conexo por trayectorias, existe una vecindad abierta conexa por trayectorias U tal que
$x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.
Por la observación 3.5, U está parejamente cubierto por p y q. Entonces $p^{-1}(U) = \bigcup S_j$ donde las S_j son hojas en $\tilde{X}$; Sea $S = S_{j_0}$ la hoja que contiene a $\tilde{x}$. Es suficiente probar que S está parejamente cubierto por h (pues h es sobre, por la observación 3.6)
Ahora, $q^{-1}(U) = \bigcup T_k$, donde T_k son las hojas en $\tilde{Y}$; así las T_k son abiertas, ajenas por pares y $q|_{T_k} : T_k \longrightarrow U$ son homeomorfismos, entonces cada T_k es conexo por trayectorias.
Notemos que, $(p \circ h) = q$ entonces $(p \circ h)^{-1}(U) = q^{-1}(U)$ esto implica que $h^{-1}(p^{-1}(U)) = \bigcup T_k$ entonces $h^{-1}(\bigcup S_j) = \bigcup T_k$ por tanto $h^{-1}(S) \subseteq \bigcup T_k$.

Por otre parte, para cada k se tiene que,

$$ph(T_k) = q(T_k) = U$$

entonces

$$h(T_k) \subseteq p^{-1}(U) = \bigcup S_j.$$

Y en particular tenemos que

$$\begin{aligned} h(T_k) &= (\bigcup S_j) \cap h(T_k) \\ &= \bigcup (S_j \cap h(T_k)) \end{aligned}$$

Dado que $h(T_k)$ es conexo por trayectorias entonces $h(T_k)$ es conexo.
Notemos que $h(T_k) \cap S_j \neq \varnothing$ para j's distintas no es posible pues $h(T_k)$ sería unión de dos abiertos ajenos no vacíos en $h(T_k)$. (Pues los S_j son abiertos y ajenos por pares).

Entonces,

$$h(T_k) \subseteq S \text{ ó } h(T_k) \cap S = \varnothing.$$

Así $T_k \subseteq h^{-1}(h(T_k)) \subseteq h^{-1}(S)$ ó $T_k \cap h^{-1}(S) = \varnothing$ por tanto
$T_k \subseteq h^{-1}(S)$ ó $T_k \cap h^{-1}(S) = \varnothing$.

Considere $\bigcup_{k \in K'} T_k$ donde T_k es tal que $T_k \subseteq h^{-1}(S)$ para todo $k \in K'$. Afirmamos que;

$$\bigcup_{k \in K'} T_k = h^{-1}(S)$$

En efecto, por un lado Sea $y \in \bigcup_{k \in K'} T_k$ entonces $y \in T_k$ para alguna $k \in K'$ implica que $y \in h^{-1}(S)$. Así $\bigcup_{k \in K'} T_k \subseteq h^{-1}(S)$

Por otro lado sea $y \in h^{-1}(S)$ entonces $y \in T_k$ para alguna $k \in K$ entonces $k \in K'$ (pues de no ser así $T_k \cap h^{-1}(S) = \varnothing$ lo cual no es posible.) así $h^{-1}(S) \subseteq \bigcup_{k \in K'} T_k$.
Finalmente, si $h(T_k) \subseteq S$ entonces existe el siguiente diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
T_k \arrow[dr, "h|_{T_k}"] \arrow[dd, "q|_{T_k}"', "\cong"] & \\
& S \arrow[dl, "p|_S", "\cong"'] \\
U &
\end{tikzcd}$$

Dado que $q|_{T_k}$ y $p|_S$ son homeomorfismos, se sigue que $h(T_k)$ es un homeomorfismo, pues,

$$(p|_S)(h|_{T_k}) = q|_{T_k} \text{ entonces } h|_{T_k} = (p|_S)^{-1} q|_{T_k}.$$

Así hemos probado que S está parejamente cubierto por h.

3.2. Espacio cubriente universal

Definición 3.9. *Un espacio cubriente universal de X es un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ con $\tilde{X}$ simplemente conexo.*

Nota: A veces se abusa de la notación y se dice que $\tilde{X}$ es un espacio cubriente universal de X cuando $\tilde{X}$ es simplemente conexo.

Teorema 3.10. *Sea X conexo y localmente conexo por trayectorias, y sea $(\tilde{Y}, q)$ un espacio cubriente de X. Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente universal de X, entonces existe una única función continua $h : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Demostración:

Dado que X es localmente conexo por trayectorias, por la observación 3.7 entonces $\tilde{X}$ también es localmente conexo por trayectorias.Además por ser $\tilde{X}$ cubriente universal, es simplemente conexo. Entonces, por el corolario 3.2existe un único levantamiento $h : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$, esto es, un único h que hace conmutar el diagrama.

■

Corolario 3.11. *De existir el espacio cubriente universal, es único.*

Demostración:

Sean $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ espacios cubrientes universales de X. Sea $x_0 \in X$, $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0), \tilde{y_0} \in q^{-1}(x_0)$. Por el teorema 3.10 existe una única función continua $h : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longrightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ y existe una única función continua $k : (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "q"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Entonces,

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[rr, "kh"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[rr, "hk"] \arrow[dr, "q"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

conmutan.
Aplicando la unicidad de h y k dada por el teorema 3.10 entonces $kh = id_{\tilde{X}}$ y $hk = id_{\tilde{Y}}$, y por lo tanto $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son homeomorfos. Por lo tanto el cubriente universal es único.

$\blacksquare$

3.3. El conjunto de transformaciones cubrientes

Definición 3.12. *Si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, una transformación cubriente es un homeomorfismo $h : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ con $ph = p$; esto es, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Definimos $Cov(\tilde{X}/X)$ como el conjunto de todas las tranformaciones cubrientes.

Observación 3.13. *$Cov(\tilde{X}/X)$ es un grupo bajo composición de funciones.*

Graficamente podemos tener en mente los siguientes diagramas, si componemos $h_1 \circ h_2$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "h_1"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "h_2 \circ h_1"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

■

Nota: Antes de continuar, mencionaremos una analogía entre grupos de transformaciones cubrientes y grupos de Galois. Suponga que F es un subcampo de un campo E.

Recuerde que;

$$Gal(E/F) = \{automorfismos\, \sigma : E \longrightarrow E \mid \sigma(\alpha) = \alpha\; para\; todo\; \alpha \in F\}$$

Sí $i : F \hookrightarrow E$ es la inclusión, entonces un automorfismo σ de E está en $Gal(E/F)$ si y sólo si el siguiente diagrama conmuta;

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "i"'] & & E \arrow[dl, "i"] \\ & F & \end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Dado que todas las flechas están invertidas, uno debe esperar que las transformaciones cubrientes den una teoria de co-Galois, esto es, hay resultados "duales"para espacios cubrientes con respecto a los resultados usuales de los grupos de Galois. En esta analogía, los espacios cubrientes universales juegan el rol de cerraduras algebraicas. Como se puede ver en [4] pag. 309.

Comparando el siguiente resultado con el teorema 2.17, vemos que $Cov(\tilde{X}/X)$ tiene propiedades parecidas a $\pi_1(X, x_0)$.

Observación 3.14. *$Cov(\tilde{X}/X)$ actúa en la fibra de $x_0 \in X$.*

Demostración:

Sea $\cdot : Cov(\tilde{X}/X) \times p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ definida por $h \cdot x = h(x)$. Probaremos que $\cdot$ está bien definida, es decir, que efectivamente $h(x) \in p^{-1}(x_0)$.
Sea $x \in p^{-1}(x_0)$
entonces $p(h(x)) = p(x)$ pues $h \in Cov(\tilde{X}/X)$, pero $p(x) = x_{0,}$ entonces $h(x) \in p^{-1}(x_0)$.
Probaremos ahora que $\cdot$ es una acción

Sean $h_1, h_2 \in Cov(\tilde{X}/X)$ y sea $x \in p^{-1}(x_0)$ entonces;

$$\begin{aligned} (h_1 \cdot h_2) \cdot (x) &= (h_1 \circ h_2)(x) \\ &= h_1(h_2(x)) \\ &= h_1(h_2 \cdot x) \\ &= h_1 \cdot (h_2 \cdot x) \end{aligned}$$

Además $Id \in Cov(\tilde{X}/X)$ y $Id \cdot x = Id(x) = x$ para todo $x \in p^{-1}(x_0)$.

Por tanto, $\cdot$ es una acción.

■

Teorema 3.15. *Sea X conexo y localmente conexo por trayectorias y sea $x_0 \in X$. Entonces un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de X es regular si y sólo si $Cov(\tilde{X}/X)$ actúa transitivamente en la fibra sobre x_0.*

Demostración:

Supongamos que $\tilde{X}$ es regular. Probaremos que $Cov(\tilde{X}/X)$ actúa transitivamente en la fibra de $x_{0.}$

Sean $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$. Dado que $(\tilde{X}, p)$ regular y por el corolario 2.23 tenemos que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$. Así por el corolario 3.4 existe un único homeomorfismo $h : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \longrightarrow (\tilde{X}, \tilde{x_1})$ con $ph = p$; esto es, existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ con $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$. Por lo tanto $Cov(\tilde{X}/X)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$.

Por otro lado, Sea $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$ y sea $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$. Entonces, por el corolario 2.23 (ii) tenemos que

$$[\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) \text{ para algún } \tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0).$$

Por otra parte que $Cov(\tilde{X}/X)$ actúe transitivamente en $p^{-1}(x_0)$ implica que existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x}_1$, entonces $h_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$, pues h es homeomorfismo, entonces h_* es isomorfismo, y aplicando p_* en ambos lados tenemos que; $p_*h_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, pero por otra parte, $p_*h_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ pues h_* es isomorfismo. Por lo tanto $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$.

Así,

$$[\lambda^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})[\lambda] = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$$

por tanto $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \lhd \pi_1(X, x_0)$ para todo $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, y se sigue que $\tilde{X}$ es regular.

Teorema 3.16. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X.*

(i) Si $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ y $h \neq 1_{\tilde{X}}$, entonces h no tiene puntos fijos.

(ii) Si $h_1, h_2 \in Cov(\tilde{X}/X)$ y existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ con $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$, entonces $h_1 = h_2$.

Demostración:
Probaremos que si h tiene puntos fijos, entonces debe ser la identidad.

(i) Suponga que existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ con $h(\tilde{x}) = \tilde{x}$ y sea $x = p\tilde{x}$. Considere el diagrama.

$$\begin{tikzcd} (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \arrow[dl, "p"] \\ & (X, x) & \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

Dado que $\tilde{X}$ es conexo por trayectorias entonces $\tilde{X}$ es conexo, entonces por el lema 2.5, hay a lo más una sola manera de completar este diagrama tal que conmuta. Como h y $1_{\tilde{X}}$ completan el diagrama, $h = 1_{\tilde{X}}$.

(ii) Si $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$, la aplicación $h_1^{-1}h_2 \in Cov(\tilde{X}/X)$ tiene un punto fijo, $\tilde{x}$, entonces por (i) tenemos que $h_1^{-1}h_2 = 1_{\tilde{X}}$. Por lo tanto $h_1 = h_2$.

■

3.4. Equivalencia entre espacios cubrientes

Definición 3.17. *Dos espacios cubrientes $(\tilde{Y}, q)$ y $(\tilde{X}, p)$ de un espacio X se dicen equivalentes si existe un homeomorfismo $\varphi : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que el siguiente diagrama conmute;*

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "q"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

Teorema 3.18. *Sea X localmente conexo por trayectorias, y sea $x_0 \in X$. Sean $(\tilde{Y}, q)$ y $(\tilde{X}, p)$ espacios cubrientes de X, y sea $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ y sea $\tilde{y_0} \in q^{-1}(x_0)$. Entonces $(\tilde{Y}, q)$ y $(\tilde{X}, p)$ son equivalentes si y sólo si $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demostración:
Supongamos primero que $(\tilde{Y}, q)$ y $(\tilde{X}, p)$ son equivalentes, y sea $\varphi : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ un homeomorfismo tal que $p\varphi = q$. Entonces $p\varphi(\tilde{y_0}) = q(\tilde{y_0}) = x_0$ esto implica que $\varphi(\tilde{y_0}) \in p^{-1}(x_0)$.

Además por ser φ homeomorfismo, $\varphi_* : \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{y_0}))$ es un isomorfismo. Entonces,

$$q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) = p_*\varphi_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{y_0})).$$

Luego, como $\tilde{x}_0, \varphi(\tilde{y_0}) \in p^{-1}(x_0)$ por el corolario 2.23 (i) $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{y_0}))$ son subgrupos conjugados. Por tanto $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ y $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \cong q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Por otro lado notemos que X es conexo porque p es una aplicación cubriente y $\tilde{X}$ es conexo por trayectorias.

Supongamos que $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$. Por el corolario 2.23(ii), entonces existe $\tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$ tal que

$$q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}).$$

Luego por el corolario 3.4 existe el homeomorfismo $\varphi : \tilde{Y} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $p\varphi = q$ Por lo tanto $(\tilde{Y}, q)$ y $(\tilde{X}, p)$ son equivalentes.

■

Recordemos que si $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y si $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ actua transitivamente en la fibra $p^{-1}(x_0)$ de la siguiente manera: Si $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, entonces $\tilde{x} \cdot [f] = \tilde{f}(1)$ donde $\tilde{f}$ es el único levantamiento de f con $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.

Definición 3.19. *Sea G un grupo y sean Y y Z G-conjuntos. Una función $\varphi : Y \longrightarrow Z$ se llama G-equivariante si $\varphi(g \cdot y) = g \cdot \varphi(y)$ para toda $g \in G$ y para toda $y \in Y$, o bien, si el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\theta_g"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\ Z \arrow[r, "\theta'_g"'] & Z \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

donde para cada $g \in G$ la función $\theta'_g, \theta_g : Y \longrightarrow Y$ definida por $\theta_g : y \longrightarrow g \cdot y$ es una permutación de Y.

Definición 3.20. *Un G-isomorfismo es una función G-equivariante que también es una biyección. Denotaremos $Aut(Y)$ el grupo (bajo la composición) de todos los $G-isomorfismos$ de Y en sí mismo.*

Vamos ahora a probar que un espacio cubriente $(\tilde{X}, p)$ de un espacio X (con punto base x_0) está completamente determinado por la fibra $p^{-1}(x_0)$ vista como un $\pi_1(X, x_0)$-conjunto. Necesitamos algunos resultados de teoría de grupos.

Lema 3.21. *Sea G un grupo, sea H un subgrupo de G (no necesariamente normal), y sea G/H la familia de clases laterales izquierdas de H en G. Entonces,*

1. *G actua en G/H por traslación izquierda.*

2. G/H es un G-conjunto transitivo.

3. H es el estabilizador de la clase de H.

Demostración:
(1) Veamos primero que G actua en G/H por traslación izquierda.

En efecto, definamos

$$\cdot : G \times G/H \longrightarrow G/H \; por \; a \cdot (gH) = agH$$

entonces

(i) $1 \cdot (gH) = 1gH = gH$

(ii) $(a_1a_2) \cdot (gH) = (a_1a_2)gH = a_1(a_2g)H = a_1 \cdot (a_2gH) = a_1 \cdot (a_2 \cdot (gH))$.

Por lo tanto $\cdot$ es una acción.
(2) Para ver que G/H es un G-conjunto transitivo, sean $g_1H, g_2H \in G/H$ y sea $a = g_1g_2^{-1}$
Entonces,

$$\begin{aligned} a \cdot (g_2H) &= ag_2H \\ &= g_1g_2^{-1}g_2H \\ &= g_1H \end{aligned}$$

(3) H es el estabilizador de la clase de H.
En efecto;

$$\begin{aligned} G_H &= \{g \in G | g \cdot H = H\} \\ &= \{g \in G | gH = H\} \\ &= \{g \in G | g \in H\} = H. \end{aligned}$$

■

Lema 3.22.

(i) Si X es un G-conjunto transitivo y H es el estabilizador de un punto, entonces X es G-isomorfo a G/H, la familia de todas las clases laterales izquierdas de H en G donde G actúa por translación izquierda.

(ii) Si H y K son subgrupos de un grupo G, entonces G/H y G/K son G-isomorfos si y sólo si H y K son conjugados en G.

Demostración:

Sea H el estabilizador de un punto en X entonces $H = G_{x_0}$ para algún $x_0 \in X$.
Dado que X es un G-conjunto transitivo entonces para cada $x \in X$ existe un $g_x \in G$ tal que $g_x \cdot x_0 = x$. Entonces definimos $\theta : X \longrightarrow G/H$ por $\theta(x) = g_x H$. Probaremos que θ es un $G-$isomorfismo

- θ está bien definida.

  Sea $x \in X$ y sean $g_x, g_x' \in G$ tales que $g_x \cdot x_0 = x$ y $g_x' \cdot x_0 = x$ entonces $g_x \cdot x_0 = g_x' \cdot x_0$ esto implica que $g_x^{-1} g_x' \cdot x_0 = x_0$ así tenemos que $g_x^{-1} g_x' \in G_{x_0} = H$ se sigue, $g_x H = g_x' H$.

Por lo tanto θ está bien definida.

- θ es sobreyectiva.

  Sea $gH \in G/H$. Sea $x = g \cdot x_0 \in X \Rightarrow \theta(x) = gH$. Por lo tanto θ es sobre.

- θ es uno a uno.

  Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $\theta(x_1) = \theta(x_2)$

  entonces g$_{x_1} H = g_{x_2} H$ con $g_{x_1} \cdot x_0 = x_1, g_{x_2} \cdot x_0 = x_2$ esto implica que $g_{x_1}^{-1} g_{x_2} \in H = G_{x_0}$ así tenemos que g$_{x_1}^{-1} g_{x_2} \cdot x_0 = x_0$ por tanto $g_{x_1} \cdot x_0 = g_{x_2} \cdot x_0$. Esto implica que $x_1 = x_2$, y por lo tanto θ es uno a uno, se sigue que θ es una biyección.

- θ es G-equivariante.

Sean $a \in G$ y $x \in X$. Entonces por ser X transitivo existe g_x tal que $x = g_x \cdot x_0$ y también existe g_{ax} tal que $a \cdot$
$x_o = a \cdot x = a \cdot (g_x \cdot x_0) = a g_x \cdot x_0$.

Entonces $g_{a \cdot x}^{-1} a g_x \cdot x_0 = x_0$ esto implica que $g_{a \cdot x}^{-1} a g_x \in G_{x_0} = H$ entonces $g_{a \cdot x} H = a g_x H$ por tanto $\theta(a \cdot x) = a\theta(x)$. Así θ es G-equivariante.

Por lo tanto θ es un $G-$ isomorfismo.

(ii) Suponga que $\theta : G/H \longrightarrow G/K$ es un G-isomorfismo.
Existe $g \in G$ tal que $\theta(H) = gK$. Notemos que para cada $h \in H$ $gK = \theta(H) = \theta(hH) = h\theta(H) = hgK \Rightarrow g^{-1} hg \in K$, por lo tanto $g^{-1} Hg \subseteq K$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\theta(g^{-1}H) &= g^{-1}\theta(H)\\ &= g^{-1}(gK)\\ &= K.\end{aligned}$$

Entonces, $\theta^{-1}(K) = g^{-1}H$. Además, si $k \in K$ entonces $g^{-1}H = \theta^{-1}(K) = \theta^{-1}(kK)$.

Por otra parte tenemos que $\theta(\theta^{-1}(kK)) = kK$ y $\theta(k\theta^{-1}(K)) = k\theta(\theta^{-1}(K)) = kK$

Por tanto
$\theta(\theta^{-1}(kK)) = \theta(k\theta^{-1}(K))$ entonces $\theta^{-1}(kK) = k\theta^{-1}(K) = kg^{-1}H$

Entonces
$gkg^{-1} \in H$ entonces $k \in g^{-1}Hg$ esto implica que $K \subseteq g^{-1}Hg$

por lo tanto $g^{-1}Hg = K$.

Por otro lado supongamos que H, K son subgrupos conjugados de G, y notemos que para $a, b \in G$ se tiene que $aH = bH$ si y sólo si $a^{-1}b \in H$ luego $g^{-1}a^{-1}bg \in g^{-1}Hg = K$ si y sólo si $agK = bgK$.
Afirmamos que $\theta : G/H \longrightarrow G/K$ definida por $\theta(aH) = agK$ es un G-isomorfismo.

- θ está bien definida:
  Sean $aH = bH$

$$\begin{aligned}\theta(aH) &= agK\\ &= bgK \text{ por la observación anterior}\\ &= \theta(bH).\end{aligned}$$

- θ es inyectiva:
  Supongamos que $\theta(aH) = \theta(bH)$. Entonces
  $gK = bgK$ así, $aH = bH$ por la observación anterior.

Por tanto θ es inyectiva.

- θ es sobreyectiva.

  Sea $bK \in G/K$. Entonces $bg^{-1}H \in G/H$ es tal que

  $$\theta(bg^{-1}H) = bg^{-1}gK = bK.$$

  Por lo tanto θ es sobreyectiva.

- θ es G-equivariante.

  pues
  $\theta(abH) = (ab)gK = a(bgK) = a \cdot \theta(bH)$

■

Lema 3.23. *Sea X localmente conexo por trayectorias, y sea $x_0 \in X$.*
Dos espacios cubrientes $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ son equivalentes si y sólo si las fibras $p^{-1}(x_0)$ y $q^{-1}(x_0)$ son $\pi_1(X, x_0) - conjuntos$ isomorfos.

Demostración:

Sean $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ y $\tilde{y_0} \in q^{-1}(x_0)$. Por el teorema 2.17, la fibra $p^{-1}(x_0)$ es un $\pi_1(X, x_0)$-conjunto transitivo y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ es el estabilizador de $\tilde{x_0}$. Similarmente $q^{-1}(x_0)$ es un $\pi_1(X, x_0)$-conjunto transitivo y $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ el estabilizador de $\tilde{y_0}$. Luego por el lema 3.22(i)

$$\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \text{ es } \pi_1(X, x_0)\text{-isomorfo a } p^{-1}(x_0)$$

y

$$\pi_1(X, x_0)/q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0}) \text{ es } \pi_1(X, x_0)\text{-isomorfo a } q^{-1}(y_0)$$

Por otra parte, por el teorema 3.18
tenemos que $(\tilde{X}, p)$ y $(\tilde{Y}, q)$ son equivalentes si ysólo si $p_*(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ y $q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$. Pero esto es equivalente (por el lema 3.22(ii)) ya que $\pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ y $\pi_1(X, x_0)/q_*\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y_0})$ sean $\pi_1(X, x_0)$-isomorfos. Y por nuestra observación esto equivale a su vez a que $p^{-1}(x_0)$ y $q^{-1}(x_0)$ sean $\pi_1(X, x_0)-$isomorfos.

■

Lema 3.24. *Sea G un grupo que actúa transitivamente en un conjunto Y, y sean $x, y \in Y$. Entonces los estabilizadores G_x y G_y son iguales si y sólo si existe $\varphi \in Aut(Y)$ tal que $\varphi(x) = y$.*

Demostración:

Suponga primero que existe $\varphi \in Aut(Y)$ con $\varphi(x) = y$.

Si $h \in G_x$ entonces $h \cdot x = x$ implica que $\varphi(h \cdot x) = \varphi(x) = y$. Por otra parte, $\varphi(h \cdot x) = h \cdot \varphi(x) = h \cdot y$ así tenemos que $h \cdot y = y$ entonces $h \in G_y$ por lo tanto $G_x \subseteq G_y$.

La otra inclusión se demuestra de manera similar veamoslo en detalle: Sea $h \in G_y$ entonces $h \cdot y = y$ esto implica que $\varphi^{-1}(h \cdot y) = \varphi^{-1}(y) = x$. Por otra parte φ^{-1} es G-isomorfismo pues φ es G-isomorfismo. Así $h \cdot x = x$ implica que $h \in G_x$, así $G_y \subseteq G_x$.

Por tanto $G_y = G_{x.}$

Por otra parte suponga que $G_x = G_y$. Sea $z \in Y$ entonces existe $g \in G$ tal que $z = g \cdot x$. Definamos $\varphi : Y \longrightarrow Y$ por $\varphi(z) = \varphi(g \cdot x) = g \cdot y$.

- φ está bien definida, esto es, no depende de la elección de g.

Si $g \cdot x = g_1 \cdot x$ entonces $g_1^{-1} g \cdot x = x$ por tanto $g_1^{-1} g \in G_x = G_{y.}$ Entonces $g_1^{-1} g \cdot y = y$, por lo que $g \cdot y = g_1 \cdot y$, por tanto $\varphi(g \cdot x) = \varphi(g_1 \cdot x)$.

- φ es una función G-equivariante.

Si $h \in G$ y $z \in Y$ tal que $z = g \cdot x$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(h \cdot z) &= \varphi(h \cdot (g \cdot x)) \\ &= \varphi(hg \cdot x) \\ &= hg \cdot y \\ &= h \cdot (g \cdot y) \\ &= h \cdot \varphi(z). \end{aligned}$$

- φ es una biyección.

Sea $g' \in G$ y además θ una función $G-$equivariante, así tenemos que $\theta : Y \longrightarrow Y$ esta definida por $\theta(g' \cdot y) = g' \cdot x$. Entonces $\theta\varphi(g \cdot x) = \theta(g \cdot y) = g \cdot x$

así tenemos que $\theta\varphi = id : Y \longrightarrow Y$. Análogamente $\varphi\theta(g \cdot y) = \varphi(g \cdot x) = g \cdot y$ entonces $\varphi\theta = id : Y \longrightarrow Y$. Por lo tanto φ es biyección.

Finalmente notemos que:

$\varphi(x) = \varphi(1 \cdot x) = 1 \cdot y = y$

■

Lema 3.25. *Sea $(\tilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, donde X es localmente conexo por trayectorias y sea $x_0 \in X$. Dados $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$, existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ con $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$ si y sólo si existe $\varphi \in Aut(p^{-1}(x_0))$ con $\varphi(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$.*

Demostración:

Suponga que existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x}_1$. Entonces los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_1}) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (\tilde{X}, \tilde{x_1}) \arrow[ur, "h^{-1}"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Entonces cumple con las hipotesis del teorema del levantamiento, así tenemos que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ y $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \supseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$. Por tanto tenemos que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$.

Por otro lado, supongamos que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$ entonces por el corolario 3.4 existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$, así tenemos que existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$ si y sólo si $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1})$.
Dado que $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ es el estabilizador de $\tilde{x_0}$ (por el teorema 2.17 (ii)). Entonces existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x_0}) = \tilde{x}_1$si y sólo si los estabilizadores de $\tilde{x_0}$ y $\tilde{x_1}$ coinciden. Por el lema 3.24 tenemos que esto ultimo ocurre si y sólo si existe $\varphi \in Aut(p^{-1}(x_0))$ con $\varphi(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$.

∎

Lema 3.26. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, donde X es localmente conexo por trayectorias, sea $x_0 \in X$, y sea $p^{-1}(x_0)$ la fibra de x_0 vista como un $\pi_1(X, x_0) - conjunto$. Entonces tenemos un isomorfismo de grupos.*

$$Cov(\tilde{X}/X) \xrightarrow{\psi} Aut(p^{-1}(x_0))$$
$$h \longmapsto h|_{p^{-1}(x_0)}$$

Demostración:

Probaremos primero que ψ está bien definida, esto es, si $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ entonces efectivamente $h|_{p^{-1}(x_0)} \in Aut\ (p^{-1}(x_0))$.

- $h(p^{-1}(x_0)) = p^{-1}(x_0)$:

Por un lado, sea $z \in h(p^{-1}(x_0))$ entonces $z = h(\tilde{x})$ para algún $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Ahora, $ph = p$ entonces $ph(\tilde{x}) = p(\tilde{x}) = x_0$ esto implica que $h(\tilde{x}) \in p^{-1}(x_0)$. Por lo tanto $h(p^{-1}(x_0)) \subseteq p^{-1}(x_0)$

Por otro lado, sea $z \in p^{-1}(x_0)$ entonces existe $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $h(\tilde{x}) = z$ de modo que $p(\tilde{x}) = ph(\tilde{x}) = p(z) = x_0$ así $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ y entonces $z = h(\tilde{x}) \in h(p^{-1}(x_0))$. Por lo tanto $p^{-1}(x_0) \subseteq h(p^{-1}(x_0))$

Además $h|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ es una biyección, pues por lo anterior $h|_{p^{-1}(x_0)}$ es sobreyectiva . Además es inyectiva por que $h : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ es inyectiva al ser un homeomorfismo.

- $h|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ es un $\pi_1(X, x_0) - isomorfismo$.

  Sea $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$.
  $h([f] \cdot \tilde{x}) = h(\tilde{f}(1))$ donde $\tilde{f}$ es el levantamiento de f tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$. Por otra parte, $[f] \cdot h(\tilde{x}) = \tilde{f_1}(1)$ donde $\tilde{f_1}$ es el levantamiento de f tal que $\tilde{f_1}(0) = h(\tilde{x})$. Pero $p(h\tilde{f}) = p\tilde{f} = f$ y $h\tilde{f}(0) = h(\tilde{x})$. Entonces por unicidad $h\tilde{f} = \tilde{f_1}$ por lo tanto $h([f] \cdot \tilde{x}) = [f] \cdot h(\tilde{x})$.

  Hemos probado que $h|_{p^{-1}(x_0)} \in Aut(p^{-1}(x_0))$.

  Probaremos ahora que ψ es un isomorfismo de grupos.

- ψ es homomorfismo:
  pues

$$\psi(h_1 \cdot h_2) = (h_1 \cdot h_2)|_{p^{-1}(x_0)} = h_1|_{p^{-1}(x_0)} h_2|_{p^{-1}(x_0)} = \psi(h_1)\psi(h_2)$$

  por lo tanto ψ es un homomorfismo.

- ψ es inyectiva.

  Sea $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $\psi(h) = id : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ entonces $h|_{p^{-1}(x_0)} = id : p^{-1}(x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ entonces $h = id : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ por el teorema 3.16 (i).

  Por lo tanto ψ es inyectiva.

- ψ es sobreyectiva.

  Sea $\varphi \in Aut(p^{-1}(x_0))$ y sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$. Por el lema 3.25 existe $h \in Cov(\tilde{X}/X)$ tal que $h(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x})$. Dado que $\pi_1(X, x_0)$ actúa transitivamente en $p^{-1}(x_0)$, entonces para cada $\tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$ existe $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\tilde{x_1} = [f] \cdot \tilde{x}$.

Por tanto $h(\tilde{x_1}) = h([f] \cdot \tilde{x}) = [f] \cdot h(\tilde{x}) = [f] \cdot \varphi(\tilde{x}) = \varphi([f] \cdot \tilde{x}) = \varphi(\tilde{x_1})$. Así tenemos que $h|_{p^{-1}(x_0)} = \varphi$ esto es, $\psi(h) = h|_{p^{-1}(x_0)} = \varphi$. Por lo tanto ψ es sobreyectiva.

■

Recordemos que si H es un subgrupo de un grupo G, entonces su normalizador es el subgrupo;

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Note que H es un subgrupo normal de $N_G(H)$; más aún, si H es un subgrupo normal de G, entonces $N_G(H) = G$.

Lema 3.27. *Sea G un grupo actundo transitivamente en un conjunto Y, y sea $y_0 \in Y$. Entonces $Aut(Y) \cong N_G(G_0)/G_0$ donde G_0 es el estabilizador de y_0.*

Tiene sentido hablar del cociente, pues G_0 es el subgrupo de G, entonces $N_G(G_0)$ es el mayor subgrupo de G en el cual G_0 es un subgrupo normal.

Demostración:

Sea $\varphi \in Aut(Y)$. Dado que G actúa transitivamente en Y, existe $g \in G$ tal que $\varphi(y_0) = g \cdot y_0$. Probaremos primero que, $g \in N_G(G_0)$.

Sea $h \in G_0$. Entonces, $h \cdot y_0 = y_0$ y $g \cdot y_0 = \varphi(y_0) = \varphi(h \cdot y_0) = h \cdot \varphi(y_0) = hg \cdot y_0$; entonces $y_0 = g^{-1}hg \cdot y_0$ así tenemos que $g^{-1}hg \in G_0$ esto implica que $g^{-1}G_0g \subseteq G_0$.

Por lo tanto $g \in N_G(G_0)$.

Note que si $\varphi(y_0) = g \cdot y_0 = g_1 \cdot y_0$ entonces $g^{-1}g_1 \cdot y_o = y_0$ entonces $g^{-1}g_1 \in G_0$ entonces $gG_0 = g_1G_0$. Por tanto, la función

$$\Gamma : Aut(Y) \longrightarrow N_G(G_0)/G_0$$

definida por $\Gamma(\varphi) = g^{-1}G_0$ donde $\varphi(y_0) = g \cdot y_0$ es una función bien definida. Probaremos que de hecho es un isomorfismo de grupos.

- Γ es homomorfismo:
  Sean $\theta, \varphi \in Aut(Y)$ y sean $\varphi(y_0) = g \cdot y_0,\ \theta(y_0) = g' \cdot y_0$.
  Entonces $\theta\varphi(y_0) = \theta(g \cdot y_0) = g \cdot \theta(y_0) = gg' \cdot y_0$. Por lo tanto $\Gamma(\theta\varphi) = (gg')^{-1}G_0$.
  Por otra parte, $\Gamma(\theta)\,\Gamma(\varphi) = g'^{-1}G_0g^{-1}G_0 = g'^{-1}g^{-1}G_0 = (gg')^{-1}G_0 = \Gamma(\theta\varphi)$

  se sigue que Γ es homomorfismo (Ahora se ve por qué la definición de Γ es con inverso.)

- Γ es inyectiva.

  Suponga que $\Gamma(\varphi) = G_0$ entonces $\varphi(y_0) = y_0$ esto implica que $\varphi(h \cdot y_0) = h \cdot \varphi(y_0) = h \cdot y_0$ para todo $h \in G$. Entonces φ deja fijo todo elemento en Y de la forma $h \cdot y_0$ con $h \in G$. Dado que G actúa transitivante en Y entonces $\varphi = id_Y$ por lo tanto Γ es inyectiva.

- Γ es sobre.

Note que si $g \in N_G(G_0)$, definimos $\varphi : Y \longrightarrow Y$ por $\varphi(y) = hg \cdot y_0$ donde $y = h \cdot y_0$ $(h \in G)$ entonces $\varphi \in Aut(Y)$ y $\Gamma(\varphi) = g^{-1}G_0$; en efecto:

- φ está bien definida.

Entonces $y = h \cdot y_0$ y $y = h_1 \cdot y_0$ esto es, $h \cdot y_0 = h_1 \cdot y_0$ entonces $h_1^{-1}h \cdot y_0 = y_0$ esto implica que $h_1^{-1}h \in G_0$ entonces g$^{-1}h_1^{-1}hg \in g^{-1}G_0 g \subseteq G_0$(donde la contención es porqueg $\in N_G(G_0))$ esto implica que $g^{-1}h_1^{-1}hg \cdot y_0 = y_0$ esto es $(h_1 g)^{-1}hg \cdot y_0 = y_0$ por tanto $h_1 g \cdot y_0 = hg \cdot y_0$.

Por lo tanto φ está bien definido.

- φ es inyectiva.

Sean $y, y_1 \in Y$ tales que $\varphi(y) = \varphi(y_1)$

entonces $hg \cdot y_0 = h_1 g \cdot y_0$ donde $y = h \cdot y_0$ y $y_1 = h_1 \cdot y_0$ esto implica que $(h_1 g)^{-1}hg \cdot y_0 = y_0$ entonces $g^{-1}h_1^{-1}hg \cdot y_0 = y_0$ entonces $g^{-1}h_1^{-1}hg \in G_0$ esto implica que $h_1^{-1}h \in gG_0g^{-1} = G_0$ entonces $h_1^{-1}h \cdot y_0 = y_0$ esto es, $h \cdot y_0 = h_1 \cdot y_0$ por tanto $y = y_1$.

Por lo tanto φ es inyectiva.

- φ es sobre.

Sea $z \in Y$, probaremos que existe $y \in Y$ tal que $\varphi(y) = z$.

Dado que G actúa transitivamente en Yentonces existe $h \in G$ tal que $h \cdot (g \cdot y_0) = z$. Definamos $y = h \cdot y_0 \in Y$entonces $\varphi(y) = hg \cdot y_0 = h \cdot (g \cdot y_0) = z$.

Por lo tanto φ es sobre.

- φ es G-equivariante.

Sea $g_1 \in G$, $y \in Y$. Dado que G actúa transitivamente en Y, existe $h, h_1 \in G$ tales que $y = h \cdot y_0,\ g_1 \cdot y = h_1 \cdot y_0$.

entonces

$$\begin{aligned}\varphi(g_1 \cdot y) &= h_1 g \cdot y_0 \\ g_1 \cdot \varphi(y) &= g_1 \cdot (hg \cdot y_0)\end{aligned}$$

Pero $g_1 \cdot y = h_1 \cdot y_0$ y $y = h \cdot y_0$

entonces $g_1 \cdot (h \cdot y_0) = h_1 \cdot y_0$ esto implica que $h_1^{-1} g_1 h \cdot y_0 = y_0$ entonces $\mathrm{h}_1^{-1} g_1 h \in G_0$ Así tenemos que $g^{-1} h_1^{-1} g_1 h g \in g^{-1} G_0 g = G_0$ entonces $g^{-1} h_1^{-1} g_1 h g \cdot y_0 = y_0$ esto es, $(h_1 g)^{-1} g_1 h g \cdot y_0 = y_0$ por tanto $g_1 h g \cdot y_0 = h_1 g \cdot y_0$.

Esto es, $\varphi(g_1 \cdot y) = g_1 \cdot \varphi(y)$

por lo tanto φ es G-homomorfismo.

Por último, dado que $y_0 = 1 \cdot y_0$ entonces $\varphi(y_0) = 1g \cdot y_0 = g \cdot y_0$

por lo tanto $\Gamma(\varphi) = g^{-1} G_0$.

Entonces para probar que Γ es sobre
sea $gG_0 \in N_G(G_0)/G_0$ entonces $g \in N_G(G_0)$ esto implica que $g^{-1} \in N_G(G_0)$ entonces definiendo $\varphi : Y \longrightarrow Y$ por $\varphi(y) = hg^{-1} \cdot y_0$ donde $y = h \cdot y_0$ entonces, por la afirmación anterior, $\varphi \in Aut(Y)$ y además $\Gamma(\varphi) = (g^{-1})^{-1} G_0 = gG_0$

por tanto Γ es sobre.

Así tenemos que Γ es un isomorfismo.

■

Teorema 3.28. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, donde X es localmente conexo por trayectorias. Entonces, para $x_0 \in X$ y $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$*

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong N_\pi(p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))/p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$$

donde π denota $\pi_1(X, x_0)$.

Demostración:

Por el lema 3.26, $Cov(\tilde{X}/X) \cong Aut(p^{-1}(x_0))$ donde la fibra $p^{-1}(x_0)$ es vista como un $\pi_1(X, x_0)$-conjunto transitivo. A su vez,como el estabilizador de $\tilde{x_0}$ es $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ (por el teorema 3.16 (ii)), el lema 3.27 nos dice que $Aut(p^{-1}(x_0)) \cong N_\pi(p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))/p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$.

Por lo tanto

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong N_\pi(p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))/p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}).$$

■

3.5. Grupo de monodromía del espacio cubriente regular

Corolario 3.29. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un espacio cubriente regular de X, donde X es localmente conexo por trayectorias. Entonces, para $x_0 \in X$ y $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$*

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}),$$

es llamado grupo de monodromía del espacio cubriente regular.

Demostración:

Dado que $(\tilde{X}, p)$ es regular entonces $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \lhd \pi_1(X, x_0)$, entonces $N_\pi(p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = \pi_1(X, x_0)$. Esto implica que $Cov(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ por el teorema 3.28.

■

Corolario 3.30. *Sea $(\tilde{X}, p)$ un cubriente universal de X, donde X es localmente conexo por trayectorias. Entonces, para $x_0 \in Cov(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

Demostración:

Dado que $\tilde{X}$ es simplemente conexo y cubriente universal, $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = \{1\}$ para todo $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ entones $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) = \{1\}$, de modo que $\tilde{X}$ es regular, entonces del corolario 3.28 se sigue que

$$Cov(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)/\{1\} \simeq \pi_1(X, x_0)$$

■

3.6. El cálculo del grupo fundamental de la circunferencia

Observe que el último resultado da una descripción del grupo fundamental que no requiere del punto base.

Finalmente en la presente sección calcularemos el grupo fundamental de la circunferencia.
Aplicación: Usaremos el corolario 3.30 para probar que $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Dado que $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, $(\mathbb{R}, exp)$ es un cubriente universal de S^1, (claro, sabemos que S^1 es localmente conexo por trayectorias) entonces el corolario 3.30 nos dice que $Cov(\mathbb{R}/S^1) \cong \pi_1(S^1, 1)$. Probemos que $Cov(\mathbb{R}/S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Sea $h \in Cov(\mathbb{R}/S^1)$ entonces h es un homomorfismo tal que;
$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $exp(h(x)) = exp(x)$

esto es, $e^{2\pi i h(x)} = e^{2\pi i x}$. Entonces $2\pi h(x) = 2\pi x + 2\pi n(x)$ donde $n(x) \in \mathbb{Z}$ para cada $x \in \mathbb{R}$ así tenemos que $n(x) = h(x) - x$ es continua (pues es suma de dos funciones continuas). Dado que $\mathbb{R}$ es conexo, entonces $n(x)$ es constante, digamos $n(x) \equiv n$, por lo tanto

$$h(x) = x + n \text{ para } n \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, notemos que si $n \in \mathbb{Z}$ y definimos $h(x) = x + n$, entonces h es un homeomorfismo y

$$\begin{aligned} exp(h(x)) &= exp(x+n) \\ &= exp(x) \end{aligned}$$

por lo tanto $h(x) \in Cov(\mathbb{R}/S^1)$

Por lo tanto

$$Cov(\mathbb{R}\backslash S^1) = \{h(x) = x + n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Notemos que $Cov(\mathbb{R}/S^1) \cong \mathbb{Z}$ mediante el isomorfismo φ definido por;

$$\begin{gathered} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} Cov(\mathbb{R}/S^1) \\ m \longmapsto h(x) = x + m. \end{gathered}$$

• φ es homomorfismo.
veremos que $\varphi(m+n) = \varphi(m) \circ \varphi(n)$ tal que, para toda $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(x) &= x + (m+n) \\ &= (x+m) + n \\ &= h_1 \circ h_2(x) \end{aligned}$$

donde $h_1(x) = x + m$ y $h_2(x) = x + n$

• φ es uno a uno.
Si $\varphi(m) = id$ entonces $x + m = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$
entonces $m = 0$ por lo tanto φ tiene kernel trivial, y φ es uno a uno.

• φ es sobre.
Sea $h(x) = x + m \in Cov(\mathbb{R}\backslash S^1)$
entonces $m \in \mathbb{Z}$ es tal que $\varphi(m) = h(x)$.

Concluimos que $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

■

Bibliografía

[1] Kosniowski C. (1986) Topología Algebraica. Editorial Reverté, S.A.

[2] Massey William S. (1991) A basic Course in Algebraic Topology. Springer-Verlag New York

[3] Munkres J. Topología, Prentice Hall, segunda edición.

[4] Rotman Joseph J. (1988) An introduction to algebraic topology. Springer-Verlag New York.